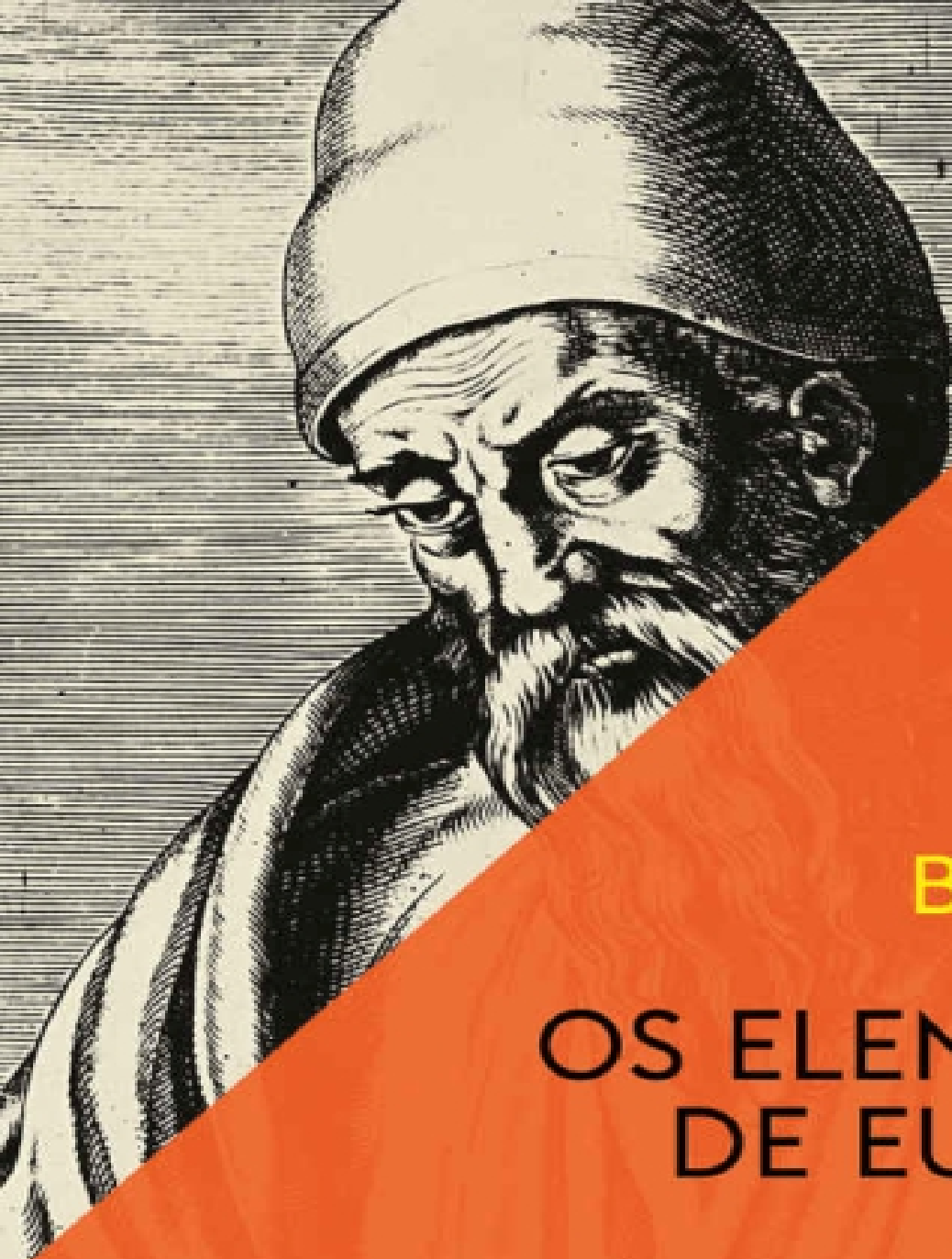




DAVID
BERLINSKI

OS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Uma história da
geometria e do
poder das ideias



Encontre mais livros como este no [e-Livros](#)

[e-Livros.xyz](#)

[e-Livros.site](#)

[e-Livros.website](#)

David Berlinski

Os elementos de Euclides

Uma história da geometria e do poder das ideias

Tradução:
Claudio Carina

Revisão técnica:
Marco Moriconi
professor do Instituto de Física / UFF



Para Morris Salkoff

On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la vérité: l'un, de la découvrir quand on la cherche; l'autre, de la démontrer quand on la possède; le dernier, de la discerner d'avec le faux quand on l'examine.^a

BLAISE PASCAL, *De l'Esprit géométrique*

^a Podemos ter três principais objetos no estudo da verdade: um, de descobri-la quando a buscamos; outro, de demonstrá-la quando a possuímos; o último, de discerni-la com os fatos quando a examinamos. (N.T.)

Sumário

Prefácio

- 1. Sinais de homens**
- 2. Uma abstração a partir da tagarelice**
- 3. Noções comuns**
- 4. Mais obscura por definição**
- 5. Os axiomas**
- 6. O maior Euclides**
- 7. Prova visível e invisível**
- 8. A proposta do diabo**
- 9. A Sociedade Anônima Euclidiana**
- 10. Euclides, o Grande**

Apêndice: Definições de Euclides

Notas

Nota do professor

Nota sobre as fontes

Índice remissivo

Prefácio

EUCLIDES É RECONHECIDO universalmente. Seu nome não corre o risco de ser esquecido. Ele se encontra na companhia de homens cuja reputação está além de quaisquer revisões. Isso já estabelece o seu lugar, mas dificilmente explica por que ele continua a ocupar tal posto tantos anos depois de sua morte.

Euclides é, naturalmente, o autor de *Os elementos*, e *Os elementos* é de longe o mais bem-sucedido dos livros didáticos de matemática. Um livro-texto que sobreviveu por mais de 2 mil anos representa uma realização incomum. A maioria tem uma vida curta e ignominiosa. Eles servem a um propósito, mas não inspiram reverência.

Os elementos de Euclides é diferente.

Ninguém jamais encontrou uma maneira melhor de apresentar os elementos da geometria plana; nenhum professor razoável poderia pensar em um substituto. Não existe nenhum.

Os elementos não é apenas um grande livro de matemática: é um grande livro. O leitor contemporâneo, ávido por revelações pessoais de Euclides, vai desistir de *Os elementos*, insatisfeito.

Não há uma palavra sobre elas. Mas, ao escrever *Os elementos*, Euclides encontrou uma maneira de impor sua personalidade poderosa sobre proposições dispersas de geometria e, impondo-se a elas, criou uma imensa estrutura, um espaço lógico, um mundo em que existe crescimento, forma e dependências íntimas entre as partes, algo muito grande mas não avassalador: *Os elementos* em si é o transbordamento de uma mente singular e determinada, impressa em papel ou papiro.

Sem ter revelado nada de interesse, Euclides, é claro, revelou tudo o que é importante.

Se isso não é uma realização artística, nada mais o é.

Paris, 2012

1. Sinais de homens

L'Homme c'est rien; l'oeuvre c'est tout.

(O homem não é nada; sua obra, tudo.)

GUSTAVE FLAUBERT

O ARQUITETO ROMANO Marcus Vitruvius Pollio viveu e trabalhou no século I a.C. Seu tratado *Libri Decem*, ou *Os dez livros*, foi dedicado a César Augusto cerca de vinte anos antes do nascimento de Cristo. Vitruvius foi arquiteto e engenheiro militar, e *Os dez livros* contém um relato notável de ideias arquitetônicas clássicas e métodos de construção. É sofisticado. Um edifício, ele insiste, deve ser durável, útil e bonito (*firmitas, utilitas, venustas*). São normas simples, mas rigorosas. Poucos edifícios construídos nos últimos sessenta anos poderiam estar de acordo com elas. Vitruvius escreve como crítico e comentarista, como alguém preparado para julgar tanto homens quanto edifícios, e quando o faz tem orgulho em ver as coisas como elas são.

Em seu sexto livro, *De Architectura*, Vitruvius reconta uma história, também contada por Cícero, sobre Aristipo, um filósofo do século IV. Depois de se encontrar “naufragado e lançado na costa de Rodes”, ele se desesperou.

Então, Aristipo começou a notar algumas figuras geométricas riscadas na areia – triângulos, talvez, ou círculos, ou linhas retas suspensas entre pontos, os detritos descuidados de alguém agachado à beira-mar e pensando em formas no espaço.

Ele disse aos seus companheiros: “Podemos esperar pelo melhor, pois vejo sinais de homens.”

Aristipo era bastante conhecido por sua devoção ao prazer; era notório por isso. Quando era repreendido por dormir com prostitutas, respondia que uma mansão não se torna inútil por já ter sido

habitada. Esperamos que homens assim sejam testados; ficamos desapontados se não o forem. É certo que Aristipo encontrou redenção na solidariedade humana – *os sinais de homens*.

A MATEMÁTICA É o que os matemáticos fazem dela. Que outro padrão se aplicaria? Ainda assim, os matemáticos costumam mostrar um apropriado bom senso do que devem fazer daquilo que fizeram. Eles são, em suma, guardiões dos limites de suas próprias fronteiras. A lógica matemática é uma parte da matemática? Ou da física matemática? A maioria dos matemáticos diria que não. Eles nunca duvidaram da importância dessas disciplinas. Não são cegos. Mas matemáticos são exigentes como os gatos. E quase tão conservadores. Seu compromisso maior é com as formas e os números, o olho que vê, o coração que bate.

Contar deveria vir em primeiro lugar, não? Todas as criaturas vivas fazem distinção entre a coisa que é e a coisa que *não* é. Dois números são necessários para expressar todos os imperativos da biologia.

Este sou eu, aquele não é.

Então, vida longa aos números.

Mas também existe a visão. As formas são tão convincentes metafisicamente quanto os números. Um único ponto, afinal de contas, divide o Universo entre o que está *no* ponto e o que *não* está.

Vida longa às formas também.

As formas e os números estão coordenados em certo sentido. Pontos muitas vezes têm um endereço numérico. A latitude e a longitude de Adelaide são 34° 55'S e 138° 36'E. Mesmo as letras S e E podem ser substituídas pelos números 19 e 5, suas posições no alfabeto. O resultado é um número que marca Adelaide como 345519138365. Da mesma maneira, números costumam ter uma localização. O número 345519138365 é notável por indicar o ponto onde se encontra *Adelaide*.

Vida longa às formas e aos números.

ALGUMAS CULTURAS SÃO geométricas em sua sensibilidade, outras não.

Ciosos da ordem, os romanos do Império apreciavam a severidade. Eles não brincavam com isso.

Uma ortodoxia visual poderosa dominava sua paisagem: anfiteatros, monumentos públicos e praças, cidades divididas em blocos, vilas senatoriais dispostas num retângulo em torno de um espaço interior, uma grande civilização urbana se espalhando pelo sul da Europa e pela bacia do Mediterrâneo.

Estranho, vindo de um povo cujos elegantes numerais (I, II, XXXII) os tornaram incapazes de conduzir seus assuntos práticos.

Nossa cultura é muito diferente. O historiador Tony Judt argumenta que, no século XIX, a estrada de ferro, ao encolher distâncias, provocou uma reorganização do tempo.¹ Um novo padrão de precisão foi primeiramente concebido e em seguida aplicado. Aproximações que por muito tempo serviram para nortear o curso da vida do ser humano – o nascer do sol, o pôr do sol, meio-dia, meia-noite – foram substituídas por um complicado aparato numérico, com o tempo dividido em partes e partes de partes.

O resultado foi uma cultura que, em comparação com o mundo antigo, é numericamente sofisticada, mas visualmente desagradável.

Nós contamos, eles viam.

Isso faz diferença – é óbvio que faz.

EUCLIDES DE ALEXANDRIA NASCEU no século IV a.C. e morreu no século III a.C. O ano 300 a.C. é muitas vezes designado como a época em que ele se desenvolveu – Euclides de Alexandria, *fl.*300, como os historiadores às vezes escrevem. Quaisquer que sejam as incertezas quanto ao seu nascimento e sua morte, ele estava então

no auge de seus poderes – alerta, vibrante e no comando. Quando jovem, Euclides deve ter sido influenciado por estudantes de Platão, e pode perfeitamente ter frequentado a academia fundada pelo filósofo, misturando-se a outros filósofos e inserindo-se gregariamente em seu grupo de fofocas. Platão dedicava-se à geometria, tendo chegado até mesmo a atribuir a várias divindades o apreço por seu estudo.

Assim como os detalhes de sua vida pessoal, as circunstâncias em que Euclides compôs sua obra-prima, *Os elementos*, permanecem em grande parte desconhecidas. Há algumas evidências de que Euclides tenha lecionado na grande biblioteca de Alexandria, fundada por Ptolomeu I. O Euclides de *Os elementos* é severo, lógico, implacável, um homem capaz de concentrar os poderes de sua mente no que é abstrato e remoto. Seria fascinante conhecer detalhes de sua vida em Alexandria, poder ver Euclides saindo cambaleante das termas ou com uma sensação de ter deixado as coisas saírem de seu controle, submetendo-se a ter as sobancelhas aparadas. Há sugestões, aqui e ali, que, como professor, Euclides foi urbano, prestativo e delicado. Entre suas outras virtudes, *Os elementos* é um grande livro; talvez Euclides tenha lido seu brilhante trabalho em voz alta, com o ar quente e ensolarado passando pelas partículas de poeira, sem saber que seus alunos ouviam em primeira mão uma lição que tantos outros viriam a ouvir tantas vezes e de tantas outras vozes.

Como matemático, Euclides apreendeu com seus predecessores, homens como Eudoxo e Teeteto, e passou aos seus sucessores, Apolônio e Arquimedes. Euclides resumiu; ele ajustou e refinou; foi uma força vital sintética e, rapidamente, se tornou um monumento – tudo isso nós sabemos a partir do que podemos imaginar e de comentários posteriores, mas o homem em si permanece invisível, com sua influência transmitida por sua atividade, um espião remoto na história do pensamento, um grande desbravador de túneis.

Euclides deve ter sido um homem encorpado, e em algum momento em seus contatos com aqueles filósofos tagarelando sem parar, juntou suas vestes e, com uma consciência arguta de seus

poderes, decidiu que tinha algo a oferecer que eles não haviam visto e não poderiam expressar.

DURANTE MAIS DE 2 MIL ANOS, geometria significou geometria euclidiana, e a geometria euclidiana era *Os elementos*. É o mais antigo texto completo da matemática ocidental tradicional e o mais influente de seus livros-texto.

O primeiro livro de *Os elementos* contém 48 proposições, e o segundo, quatorze. Existem ao todo treze livros compreendendo 467 proposições, e mais dois livros de autoria incerta, atribuídos a edições mais antigas de *Os elementos*.

As proposições nos Livros I a IV dizem respeito a pontos, linhas retas, círculos, quadrados, triângulos, ângulos retos e retângulos, as formas estáveis de arte e da arquitetura. Os Livros V a IX desenvolvem uma teoria de magnitudes, proporções e números. Os demais livros são dedicados à geometria sólida. Cada livro de *Os elementos* é convincente, mas o mito e a memória de Euclides estão nos primeiros quatro livros de seu tratado.

Em cada geração, alguns estudantes encantaram-se com *Os elementos*. “Aos onze anos de idade”, lembra Bertrand Russell em sua autobiografia, “eu comecei a ler Euclides, tendo meu irmão como tutor. Foi um dos grandes acontecimentos da minha vida, tão deslumbrante como o primeiro amor. Eu nunca tinha imaginado que havia algo tão delicioso no mundo.”

O curso de geometria euclidiana há muito faz parte do currículo universal da humanidade. Mesmo os que não foram conquistados por seu estudo reconhecem muitas vezes que a disciplina euclidiana lhes fez bem. Melhorou sua higiene mental. Os estudantes aprendem álgebra mais ou menos no mesmo período em que estudam geometria, e, o que é bastante curioso, raramente percebem a melhoria que ela confere.

Álgebra, os alunos se queixam, é simplesmente desagradável.

NADA SOBRE EUCLIDES sobreviveu até o século XXI. Conhecemos Euclides apenas a partir de cópias de cópias, passando pela mutilação de traduções do grego para o latim e depois para o árabe, voltando para o grego e finalmente para o latim medieval. As versões modernas de Euclides são baseadas em um manuscrito grego do século X, identificado no século XVIII pelo estudioso francês François Peyrard. Há uma distinção entre a solidez pungente do pensamento de Euclides e os papiros perecíveis que ele usou para expressá-los. Muito antes de Euclides, os babilônios escreviam laboriosamente em tabuletas. O barro molhado sobre uma mesa comprida fazia *ploft*. As inscrições feitas por um estilete soavam *chif, chif, chif*. O forno era ao sol. E, conseqüentemente, a imortalidade. Nós podemos ver suas palavras, bem como suas obras. Mas não podemos ver o próprio Euclides de maneira alguma.

Se Euclides impôs ordem sobre seu objeto de estudo e o transformou em um sistema, foi uma ordem tão severa que moldou a geometria numa forma fixa até pelo menos a Renascença Italiana, no século XVI. Desde então, seguiu-se um processo longo e confuso em que o monumento euclidiano foi gradualmente descascado até que, no século XIX, os matemáticos descobriram geometrias *não* euclidianas, com a geometria euclidiana tornando-se uma entre muitas, e os matemáticos quase enlouqueciam com possibilidades que os absorviam, com espaços que inchavam como bolas de basquete, curvados como selas de cavalo, ou que seguiam eternamente sem chegar a lugar algum.

Os *elementos* representa a grande conquista da tradição matemática grega. Arquimedes foi um matemático mais brilhante do que Euclides. Ele deu ao mundo aquilo que grandes matemáticos sempre dão, que é um registro de seu gênio, mas em termos de um sistema axiomático, Euclides deu à matemática algo ainda mais duradouro, e que era um estilo de vida. Era um estilo de vida invisível para as pessoas que antecederam os gregos, e invisível também para os chineses, os mestres de uma cultura tecnológica sutil.

E, como era de esperar, continua invisível para todos os outros – até hoje – e por isso deve ser ensinado como qualquer outro artefato da civilização.

2. Uma abstração a partir da tagarelice

Assim como todos os sóis se queimam num único sol
A palavra é muita, mas a palavra é uma só.

G.K. CHESTERTON

UM SISTEMA AXIOMÁTICO É uma organização estilizada da vida intelectual, uma abstração a partir da tagarelice. Euclides concebeu um sistema axiomático para cumprir uma ambição inconcebível e inexprimível antes de sua existência: derivar todas as proposições sobre geometria a partir de um punhado de suposições. Os egípcios que construíram as pirâmides certamente sabiam algo sobre pirâmides. Eles não eram pouco sofisticados. Tinham uma boa intuição sobre medidas e mensuração. Mas o que eles sabiam, sabiam de forma incompleta. Eles fizeram o que precisavam, mas não tinham uma compreensão do todo. Euclides acreditava na existência de uma forma de unidade subjacente à diversidade de experiências, e é isso que marca a diferença entre Euclides e os matemáticos egípcios, homens do chicote.

Euclides precisou de uma dupla compreensão para chegar à imortalidade. A primeira: as várias proposições da geometria *podiam* ser organizadas numa única estrutura; e a segunda: o princípio da organização que relaciona as proposições geométricas *deve* ser lógico, e, portanto, estranho à própria geometria.

São ideias radicalmente contraintuitivas, faraônicas em sua audácia.

Os pressupostos de Euclides são comumente chamados de axiomas, ou às vezes postulados; suas conclusões são os teoremas. Uma demonstração é uma cadeia ligando os axiomas aos teoremas em elos incontestáveis. Euclides propôs cinco axiomas, e destes derivou 467 teoremas.

Um sentido de seu poder intelectual, de sua grandeza – esse é o legado de Euclides. Antes de Euclides, os pitagóricos eram homens consumidos pelo arrebatamento da matemática. Comungavam com os números e eram frequentemente tentados por grandes loucuras intelectuais. Sentiam prazer diante do absurdo. Em comparação, Euclides é imperturbável. Não existe arrebatamento em *Os elementos*, mas também não há nada de insano. A estrutura criada por Euclides é intelectualmente acessível a qualquer um capaz de seguir um argumento.

Assim como as pirâmides, um sistema axiomático é uma obra pública.

A GEOMETRIA EUCLIDIANA É o estudo das formas no espaço. As formas não são limitadas pela roda do tempo. Não existe um lugar onde resida o triângulo de Euclides, tampouco nenhum momento em que tenha chegado lá. Platão argumentava que as formas são uma parte do reino das ideias, com cavernas e homens das cavernas, sombras e o sol estático. Nenhum filósofo desde Platão se sentiu totalmente satisfeito com esse reino. Por existirem no grande além, as formas platônicas não têm poderes causais óbvios. Mas mesmo sem ter poderes causais óbvios, elas têm óbvios efeitos causais. Euclides chegou à conclusão sobre os triângulos raciocinando sobre as formas do triângulo, a coisa essencial.

Mesmo que sejam difíceis de aceitar, as formas platônicas são impossíveis de evitar. Não há como fugir delas. Os matemáticos costumam estabelecer uma diferença entre os modelos concretos e abstratos da geometria de Euclides. Nos modelos abstratos da geometria euclidiana, as formas gozam de uma existência platônica pura. Os modelos concretos estão no mundo físico: estradas disfarçadas de linhas retas, pingos de tinta como pontos, anfiteatros como círculos, órbitas planetárias como elipses. Os matemáticos têm admitido que os modelos concretos da geometria euclidiana apresentam um grau de vitalidade negada aos modelos platônicos. “É preciso dizer o tempo todo”, observou o matemático alemão

David Hilbert, “em vez de pontos, linhas retas e planos – mesas, canecas de cerveja e cadeiras.” Essas palavras transmitem uma impressão asseguradora da vida normal. Mesas, canecas de cerveja e cadeiras! O que poderia ser mais mundano? Mas a expressão *em vez de* instiga uma reserva. A distância mais curta entre duas cervejas é uma linha reta no tempo *ou* no espaço. Sim, com certeza isso é verdade. Mas a menor distância entre duas cervejas é uma linha reta *porque* a menor distância entre dois pontos é uma linha reta. Nada é em vez de nada.

Sem os modelos platônicos, os modelos concretos não teriam interesse. Afinal, Euclides não convida seus leitores a considerar linhas *mais ou menos* retas. Quanto mais, quanto menos? E se não existem linhas totalmente retas, qual seria a comparação?

Os modelos concretos da geometria euclidiana incluem mesas, cadeiras e canecas de cerveja. Elas estão onde sempre estiveram: no bar.

Os modelos platônicos da geometria euclidiana incluem os pontos, linhas e planos. Eles também estão onde sempre estiveram, e isso só Deus sabe onde é.

SE OS TEOREMAS de um sistema axiomático decorrem de seus axiomas, é razoável perguntar o que pode significar *decorrer de*. O que significa isso? A imagem é física, como quando um hematoma decorre de um golpe, mas a relação é metafórica. A relação entre os axiomas e os teoremas de um sistema axiomático é, quando se descartam as metáforas, notavelmente recôndita, por isso invisível para todas as civilizações, exceto a grega.

Sem dúvida, os homens do Oriente Próximo antigo sabiam o que eram argumentos. Eles tinham muitos deles. O que eles sabiam, sabiam de forma imperfeita. Não tinham palavras para esclarecer as distinções que pressentiam. Por que elaborar uma argumentação quando era tão mais fácil encerrar o assunto com violência ou indiferença? Esse ponto de vista nunca caiu em desuso. Foram os gregos que realmente elaboraram e implantaram a própria ideia de

uma inferência na consciência, inquirindo pacientemente por um relato da natureza, a maneira como controlava o movimento da mente e a que parte do catálogo dos poderes humanos pertencia.

Mais ou menos na mesma época em que Euclides compôs *Os elementos*, Aristóteles apresentou uma análise sutil e refinada da inferência silogística, o modelo de argumento que leva Sócrates – e o resto de nós, aliás – à morte, em virtude de ser um homem e de nós sermos mortais. Nascido em 384 a.C. e morto em 322 a.C. (mais uma vítima do próprio silogismo), talvez Aristóteles tenha conhecido Euclides quando Euclides era jovem, quem sabe até ter dado tapinhas em seu ombro togado. Muito pouco é conhecido sobre as circunstâncias da vida de Euclides para se dizer que mãos ele pode ter apertado. Mesmo assim, os dois homens trabalharam de mãos dadas.

OS ARGUMENTOS, alegou Aristóteles, podem ser divididos entre os que são bons e os que não são. No silogismo, duas premissas se resolvem numa conclusão:

Todos os cães são mamíferos.
Todos os mamíferos são animais.
Todos os cães são animais.

Bom

Nenhum peixe é cão.
Nenhum cão pode voar.
Todos os peixes podem voar.

Mau

Qualquer cão que não tenha perdido uma coisa ainda a tem.
Nenhum cão perdeu uma quinta pata.
Todos os cães têm cinco patas.

Vergonhoso

Como esses exemplos podem indicar, bons argumentos são bons em virtude de sua forma e não de seu conteúdo. O lógico é indiferente à distinção entre *todos os cães são mamíferos* e *todos os*

homens são mortais; ambos os casos cabem no todo de *todos os As são B*. Essa é a visão aristotélica, e os lógicos aceitam-na desde então. A conclusão de um argumento válido é admitida por suas premissas. A verdade desempenha uma função auxiliar. Se as premissas de um argumento válido são verdadeiras, sua conclusão deve ser verdadeira, mas se eles são verdade é uma questão na qual o lógico tem pouco a dizer; um argumento pode ser bom, mesmo que suas premissas sejam falsas, e ruim, mesmo que suas premissas sejam verdadeiras.

É tentador imaginar um fraternal toma lá dá cá entre Euclides e Aristóteles, com Euclides tomando, Aristóteles dando, com Euclides avançando em provas e argumentos que Aristóteles já tinha avaliado e classificado. Mas não foi bem assim. *Os elementos* é uma obra de grande sofisticação lógica, mas não é um trabalho de autoconsciência lógica. O tema de Euclides é a geometria, o negócio dele é a prova, e Euclides não foi um matemático disposto a dar um passo para trás para pegar a si mesmo no ato de pisar atrás. Que seus argumentos eram válidos, ele não tinha dúvidas, mas não tinha qualquer interesse no que os tornava válidos.

Frequentemente Euclides costumava usar formas de argumento que Aristóteles não tinha analisado corretamente ou sequer analisado. Por exemplo, se os números naturais progridem de 1 em 1, *então* não existe número natural entre 3 e 4. Os números naturais progridem por 1. Segue-se que não há nenhum número natural entre 3 e 4. A inferência prossegue pela imponente música de *modus ponens*. Não há silogismo envolvido, apenas o jogo direto entre proposições e suas partículas – *se*, *então*, *e*. Euclides tem especial apreço em chegar às suas conclusões demonstrando que cada proposição leva a uma contradição, e portanto deve ser rejeitada. Nas mãos de Euclides, esse estilo de argumentação costuma se tornar um torpedo.

Permanece a questão da distinção entre um sistema axiomático e um argumento.

Não existe nenhuma.

Um argumento é um pequeno sistema axiomático, e um sistema axiomático é um grande argumento.

3. Noções comuns

La dernière démarche de la raison, c'est de connaître qu'il y a une infinité de choses qui la surpassent.

(O último passo da razão é a compreensão de que há uma infinidade de coisas além da razão.)

PASCAL

“APENAS EUCLIDES”, ESCREVEU certa vez Edna St. Vincent Millay, “viu a beleza nua.” Esta é a primeira linha de um soneto do mesmo nome. Críticos literários costumam se sentir constrangidos pelo soneto, e matemáticos, por Edna St. Vincent Millay. *Apenas* Euclides? A ideia, contudo, de que “Apenas Euclides viu a beleza nua” tem a elegância de chamar atenção para a nudez de inferência exibida por todas as demonstrações euclidianas. É algo raramente visto fora da matemática – esse poder oculto, ainda que de certa forma vívido, do fascínio de uma demonstração euclidiana. No quadro-negro, acima vão os axiomas; abaixo vêm os teoremas. Estudantes e leitores são levados a pensar no arranjo como algo estimulante. *E é*. Há tanto nele de argumento quanto de inferência comuns.

Mas essa maneira de apresentar Euclides e seu *Os elementos* impõe uma tosca distorção dos pensamentos de Euclides: ela permite que o drama encenado de suas provas represente a grandeza de seu sistema como um todo. Euclides pretendia que suas provas fossem compreendidas no pano de fundo de suas noções e definições comuns. Em quase toda demonstração, ele apela às suas próprias noções comuns e, em muitas demonstrações, às suas definições ou às ideias que decorrem naturalmente de suas definições. Além disso, existem as ideias de Euclides sobre o espaço e a ação humana e a exaltação da geometria, uma característica tão chamativa de seus pensamentos. Foco, controle e tensão – eles estão nas demonstrações de Euclides, mas esses momentos, como todo atleta sabe, não

aparecem como isolados, breves, explodindo milagres. Não são absolutamente isolados, e tampouco milagres. Estão baseados nas meditações de Euclides sobre o que pode ser suposto e o que não pode, e como é difícil definir ideias, ou até mesmo expor essas ideias. Em tudo isso, o mestre, determinado a se explicar, permanece inteiramente a caráter, sempre rigoroso, nenhuma palavra desperdiçada – tão prudente, compacto e teso como as peles esticadas nas quais escreveu.

AS NOÇÕES COMUNS de Euclides representam as “convicções nas quais todos os homens baseiam suas provas”. As palavras são de Aristóteles, mas a ideia de que *são* convicções sobre as quais todos os homens baseiam suas provas deve ter sido ela mesma uma delas, pois Euclides se apropriou da ideia sem hesitação e sem argumento.

No total, há cinco noções comuns:

1. Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
2. Se iguais são acrescentados a iguais, os todos são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os remanescentes são iguais.
4. Coisas que coincidem umas com as outras são iguais entre si.
5. O todo é maior que a parte.

Esses princípios transmitem um ar de obviedade. Eles têm autoridade. Ninguém na época de Euclides ou na nossa está propondo que se iguais são acrescentados a iguais, o resultado deve ser *desigual*. Mesmo assim, é preciso uma delicadeza surpreendente para dizer exatamente o que esses princípios significam. Uma delicadeza que Euclides não tinha. Isso pode sugerir que a convicção de Euclides de que essas noções são *comuns* representava de sua parte uma disposição de depositar sua confiança em coisas que não podia explicar nem justificar. Dizer isso não envolve repreensão. Se Euclides não podia explicar nem

justificar as noções comuns que invocava, tampouco podemos fazer isso com respeito às nossas próprias. Foi o gênio de Euclides que compreendeu que, quaisquer que fossem os poderes de seu sistema geométrico, ele repousava sobre certas noções comuns.

Foi tarefa de Euclides dizer o que eram essas noções.

E é nossa tarefa dizer o que elas significam.

A IGUALDADE É UMA ideia indispensável. É como a água para o peixe – em toda parte o tempo todo, mas fácil de ignorar e difícil de definir. Dizer que *duas* coisas são iguais é sempre falso, e dizer que *uma* coisa é igual a si mesma é sempre trivial. Trata-se de uma refutação conceitual bastante rigorosa.

A primeira noção comum de Euclides costuma ser ilustrada por três linhas retas rotuladas A, B e C e um despreocupado apelo à intuição. Se A é igual a B e B é igual a C, então A é igual a C.

O apelo não está no lugar errado, mas é enganoso. Por um lado, nem ilustração nem intuição dizem muito sobre o conceito de igualdade. Por outro, o que Euclides diz de igualdade é verdadeiro também para tamanho: se A é maior que B e B maior que C, então A é maior que C.

A afirmação de Euclides de sua primeira noção comum encobre uma *chamboulement*, uma desordem. A ilustração, essas linhas – isso é um bom começo. Mas duas linhas iguais? Com a longa história da geometria euclidiana atrás de nós, podemos dizer com certa facilidade que duas linhas são iguais se forem iguais em *comprimento*. Uma linha de um metro em Moscou tem o mesmo comprimento que uma linha de um metro em Seattle. Mas a igualdade de comprimento é um conceito bem mais estrito que a própria igualdade, e não é um conceito que Euclides tornou acessível para si mesmo. A geometria euclidiana não contém um esquema sob o qual números são diretamente associados a distâncias.

A quarta noção comum de Euclides expressa o conceito euclidiano de igualdade geométrica. Em vista do aperto em que se encontrava, podemos supor que Euclides chegou à melhor das soluções. Duas coisas são iguais se elas coincidem. Esse princípio de superposição Euclides pôs para trabalhar em *Os elementos*. No caso daquelas linhas retas, ele admite uma aplicação imediata. Duas linhas são iguais se elas coincidem. Uma vez colocada essa questão sobre igualdade, surge agora outra questão muito similar sobre coincidência: exatamente quando coisas coincidem? Dizer que duas coisas coincidem quando elas coincidem igualmente não melhora muito a situação. Tendo se apegado à coincidência como crucial, Euclides pode muito bem ter se lembrado de que, em suas definições, ele afirma que uma linha, embora tenha comprimento, não tem largura. Que investigação pode justificar a conclusão de que duas linhas sem largura coincidem? Se não há investigação, como poderíamos dizer que duas linhas coincidem mesmo em largura se não podemos dizer se elas coincidem em geral?

A roda do tempo girou 23 séculos até que George Boole e C.S. Pierce avaliassem a igualdade em seu contexto próprio, lógico. Os matemáticos hoje em dia conduzem tudo a passos largos. Aristóteles e Euclides tiveram mais dificuldades.

A PROPOSIÇÃO DE QUE Euclides é sábio diz de Euclides que ele é sábio. Sua sabedoria é algo que ele possui, um aspecto do homem. *Euclides é mais sábio que Aristóteles* diz de Euclides e de Aristóteles que um homem é mais sábio que o outro. Isso os põe ambos em seus lugares – dois homens, mas uma relação.

Igualdade é uma relação e, enquanto tal, um membro de uma fraternidade grande e mundial: coisas maiores, mais altas, mais ligeiras, menores, mais grandiosas, de maior porte, pais e filhos, filhas e mães, antes e depois. Para eles, a lógica de relações, um cálculo geral de exatamente como um A pode estar relacionado a um B, é a regra a ser seguida.

Em primeiro lugar, a igualdade é *reflexiva*. $A = A$. Nenhuma relação poderia ser mais próxima. Ou mais universalmente desfrutada.

E *simétrica*. Se $A = B$, então $B = A$.

E *transitiva*. Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

Euclides viu a transitividade da igualdade. É a primeira de suas noções comuns. Mas ele não atentou à simetria e à reflexividade, ou não as mencionou.

Em suas segunda e terceira noções comuns, Euclides justapõe a relação de igualdade e as operações de adição e subtração. Coisas são acrescentadas umas às outras ou subtraídas umas das outras. Como subtração é uma forma de desfazer a adição, a segunda e a terceira noções comuns de Euclides podem afunilar em uma declaração abrangente: se $A = B$ e $C = D$, então $A \pm C = B \pm D$.

Não há razão, pode-se pensar, para restringir esses princípios a operações aritméticas; não há absolutamente razão para restringir. $A = B$ se e somente se o que for verdade para A for verdade para B . Isso é pensado às vezes como uma definição de igualdade, portanto uma maneira de eliminar de vez um conceito incômodo. Não está claro que essa manobra resulta em algum benefício. Entre as coisas verdadeiras de A está certamente que A é igual a si mesmo. O conceito destinado a desaparecer acaba reaparecendo. Isso pode sugerir que a igualdade não pode ser facilmente eliminada em favor da verdade porque ela não pode ser eliminada de forma alguma.

Ponto final.

A QUARTA NOÇÃO DE EUCLIDES expressa um critério de identidade, um princípio pelo qual triângulos, círculos ou linhas retas podem ser considerados a mesma coisa. A ideia está implícita em todos os teoremas que Euclides demonstra. Ela é da essência. Se o geômetra não pode dizer quando duas formas são a mesma, ele não pode dizer quando elas são diferentes, e se não pode dizer se

as formas são as mesmas ou diferentes, para que serve o geômetra?

Agora vamos supor que dois triângulos estão separados no espaço. Eles se tornam coincidentes quando um deles é movido de forma a cobrir o outro de modo que as duas figuras estejam perfeitamente alinhadas. Nada é deixado de lado, excluído ou posto para fora.

Coincidência ou superposição oferecem ao geômetra uma medida tosca mas eficaz de igualdade das formas. O que não está inteiramente óbvio em toda essa forma tosca porém eficaz é exatamente como figuras separadas no espaço – um triângulo aqui, outro ali – podem ser movidas pelo espaço de modo que sua coincidência possa ser verificada.

Essa questão surge logo em *Os elementos*, na Proposição 4:

Se dois triângulos têm os dois lados iguais aos dois lados respectivamente, e se os ângulos contidos pelas linhas retas iguais são iguais, eles também terão a base igual à base, o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, respectivamente, a saber aqueles em que os lados iguais estão opostos.

Dois triângulos são iguais, afirmava Euclides, se forem congruentes. E eles são congruentes se dois de seus lados forem iguais, assim como os ângulos formados pelos lados iguais.

A prova é simples em sua notoriedade, pois Euclides entra logo no pântano de conceitos que não analisou e não pôde justificar: “Se”, diz Euclides, “o triângulo ABC for justaposto ao triângulo DEF, e se o ponto A for colocado sobre o ponto D e a linha reta AB sobre DE, então o ponto B vai coincidir com o ponto E, porque AB é igual a DE.”

Euclides está no pódio. Acaba de apontar para sua prancha empoeirada com a ponta do dedo esticado. Radiante de satisfação, ele está prestes a dizer...

Quando é interrompido.

– Justaposto por quem, senhor?

Uma pergunta.

– Colocado como, professor?

Outra.

– Coincide quando, *maître*?

Uma terceira.

BERTRAND RUSSELL E DAVID HILBERT pensavam que Euclides teria se saído melhor se tivesse aceitado a Proposição 4 como um axioma em vez de reivindicá-la como um teorema. É uma política, como Russell observou em outro contexto, que tem todas as vantagens de um roubo em relação a um trabalho honesto. Designar a Proposição 4 de Euclides como axioma não faz muito para diminuir a sensação de que, ao mover coisas ao redor do quadro-negro, o geômetra assumiu algo em conflito com o rigor da geometria euclidiana. Num livrinho intitulado *Leçons de géométrie élémentaire* (Lições de geometria elementar), o matemático francês Jacques Hadamard propôs que a coincidência fosse subordinada a algum catálogo das maneiras com as quais as formas podem se mover no espaço euclidiano. Se a ideia euclidiana de coincidência é um teorema, ela depende de suposições que Euclides não fez; se for um axioma, faz essas suposições sem defendê-las; e se for baseada em alguma avaliação antecedente de movimentos permitidos nas figuras euclidianas, ambas as coisas.

A distinção entre os modelos concretos e os abstratos da geometria euclidiana oferece um bom ponto de observação do surgimento dessa incerteza e a posterior separação num dilema destrutivo.

A ideia de coincidência aplica-se aos modelos concretos ou aos abstratos da geometria euclidiana? Ou a nenhum, ou a ambos? Não aos modelos concretos, certamente, pois triângulos físicos nunca são completamente coincidentes, não importa como sejam movidos. Algo é sempre deixado de fora, ou algo sempre é deixado por cima. Como podem dois objetos físicos coincidir perfeitamente?

De jeito nenhum, é a resposta correta; é a única resposta. Se é verdade que triângulos concretos nunca são coincidentes, é igualmente verdade que triângulos abstratos não podem ser movidos. Eles estão além do espaço e do tempo. Mover-se não está entre as coisas que fazem, pois eles não *fazem* nada.

Sensível a essa questão, Russell descartou a ideia de que na geometria euclidiana algo está se movendo ou sendo movido. No suplemento que escreveu para a edição de 1902 da *Encyclopedia Britannica*, Russell observou que “o que em geometria é chamado de movimento é meramente a transferência de nossa atenção de uma figura para outra”.

Mas a atenção do geômetra é como o vento: ela vai aonde se apraz. Para onde ela vai é menos relevante, a não ser que vá de uma figura a outra figura igual.

Coincidência é uma condição que os modelos concretos da geometria euclidiana não podem satisfazer: eles nunca são o mesmo. E é uma condição que os modelos abstratos da geometria euclidiana não satisfazem: eles não podem ser movidos.

FINALMENTE, há a última das noções comuns de Euclides, o princípio de que o todo é maior do que a parte. Longe de expressar uma convicção sobre a qual “todos os homens baseiam suas provas”, a proposição é trivial e pode ser falsa ou verdadeira.

Se o todo de algo é por definição maior que suas partes, Euclides não avançou sua causa ou seu caso; mas se a própria ideia de uma parte em relação a um todo é deixada indefinida, é muito simples elaborar exemplos nos quais o todo é menor ou igual a suas partes.

O número 6, para dar um exemplo, tem sua própria estrutura interna. Pode fazer sentido dizer que 0 e 1 são números simples, completamente sem partes, mas o número 6 é a soma e produto de vários números e tem assim uma riqueza em sua identidade, uma complexidade de outro modo oculta. O número 6 é maior que suas partes? Ele é maior que a *soma* de suas partes? Não, se as partes do número forem compostas por seus divisores, 1, 2 e 3. Sua soma é igual a 6.

O número 12, por outro lado, é *menor* que a soma de suas partes, 1, 2, 3, 4 e 6.

A relação entre todos e partes é extremamente sensível, portanto, à maneira como as ideias subjacentes são especificadas. Se é assim, é difícil atribuir a quinta noção comum de Euclides àquelas convicções “sobre as quais todos os homens baseiam suas provas”. Existe muito de dependência circunstancial envolvida para ser uma noção comum a todos.

Objetos infinitamente grandes apresentam problemas específicos. Será que a afirmação de que o todo é maior que suas partes é verdadeira para os números naturais? O ceticismo desponta quando os números naturais 1, 2, 3 ... podem ser postos numa correspondência estrita com os números pares 2, 4, 6 A correspondência é tão estrita que, para todo número natural, há um número par, e vice-versa. O conjunto de números naturais e o conjunto de números pares, como dizem os lógicos, têm a mesma cardinalidade. Eles são do mesmo tamanho.

Mas os números pares não são uma parte dos números naturais? Se não são, que significado residual pode ser atribuído aos agora errantes termos *parte* e *todo*?

O OBJETIVO DE RELACIONAR de uma vez por todas essas ideias sobre as quais “todos os homens baseiam suas provas” é muito atraente. Uma lista é algo explícito, e assim aberta a inspeção; uma vez aberta a inspeção, uma relação de noções comuns satisfaz o desejo de ter todas as cartas na mesa. Suposições ocultas, como cartas ocultas, sugerem que o que está oculto é de algum modo desacreditado.

O caráter explícito com o qual Euclides afirma certas noções comuns é, por certo, não uma razão em si mesma para considerar suas noções comuns como algo bom. Euclides nunca muda de direção. Suas noções comuns são o que parecem. Expressam suposições que são mais gerais que seus axiomas, mas não menos indefensáveis.

Se as suposições de Euclides não podem ser derivadas de nada além delas mesmas, elas se mantêm por conta de sua onipresença. Sem elas, acredita Euclides, não pode haver prova alguma. Seja qual for sua onipresença, as noções comuns de Euclides sugerem uma questão que nem ele nem Aristóteles jamais consideraram. Podem essas noções comuns serem falhas por serem incompletas? Sempre que uma lista de suposições comuns é oferecida, afinal, é fácil retroceder e indicar com alguma segurança as suposições das quais as próprias suposições dependem.

Como qualquer outro matemático, Euclides pressupôs muita coisa que nem chegou a notar. Para afirmar qualquer coisa, devemos supor um mundo estável o suficiente para que algumas coisas permaneçam as mesmas, inclusive enquanto outras coisas mudam. Essa ideia de estabilidade geral é autorreferente. Para expressar o que ela diz, é preciso pressupor o que estabilidade significa.

Euclides se expressava em grego; eu estou escrevendo em outro idioma. Nem o grego de Euclides nem o meu idioma dizem por si mesmo se é grego ou outro idioma. Não ajuda muito avisar que um livro é escrito em um idioma se for preciso dizer também que *escrito em um idioma* significa escrito em um idioma. Seja qual for a linguagem, sua identificação faz parte do pano de fundo. Esse pano de fundo específico deve necessariamente permanecer no fundo, e qualquer esforço para movê-lo para a frente levará a uma regressão infinita, com certezas requerendo outras certezas.

Esses exemplos sugerem o que está em jogo em qualquer tentativa de definir de uma vez por todas as convicções “nas quais todos os homens baseiam suas provas”. Isso sugere algo sobre a paisagem sempre retrocedente de uma demonstração, ratificando assim o fato de que mesmo a mais impecável das demonstrações é um artefato.

4. Mais obscura por definição

Às vezes, coisas podem se tornar mais obscuras por definição. Eu vejo uma vaca. Eu a defino: *Animal quadrupes ruminans cornutum*. Vaca é mais simples.

SAMUEL JOHNSON

AS PÁGINAS DE *Os elementos* contêm 23 definições. Destas, as primeiras sete e a 23ª são fundamentais:

1. Um ponto é o que não tem parte.
2. Uma linha é comprimento sem largura.
3. As extremidades de uma linha são pontos.
4. Uma linha reta é uma linha que se estende uniformemente com pontos em si mesma.
5. Uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura.
6. As extremidades de uma superfície são linhas.
7. Uma superfície plana é uma superfície que se estende uniformemente com as linhas retas em si mesma.
23. Linhas retas paralelas são linhas retas as quais, estando no mesmo plano e sendo produzidas indefinidamente em ambas as direções, não se encontram em qualquer direção.

Matemáticos dos séculos XIX e XX fizeram objeções quase em uníssono a essas definições. Moritz Pasch e David Hilbert criticaram Euclides porque, em sua luta para dizer o que pretendia, Euclides rejeitou o que sabia: as coisas chegam a um fim. Se axiomas devem ser aceitos sem prova, também alguns termos devem ser aceitos sem definição. Da definição 9 até a 22, Euclides é quase impecável, definindo termos que são novos referindo-se a termos mais antigos. Um triângulo, diz ele em sua definição 19, é uma figura contida por

três linhas retas. Não é perfeito. O que é uma figura? No entanto, nada mau. Permanecem suas definições iniciais. Um ponto, afirma Euclides, não tem partes. É a primeira coisa que ele diz, e as circunstâncias sugerem que ele pretendia dizê-lo. E como é a primeira coisa que Euclides diz, é a primeira definição que os críticos contestam. “Esta [definição] significa pouco”, argumenta Morris Kline em *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, “pois qual é o significado de partes?”

No entanto, se a intenção de Kline era censurar Euclides por um engano lógico, ele o fez cometendo também um equívoco. A anca de uma vaca é uma de suas partes, mas a palavra *anca* tem significado próprio. As ancas não têm nada a ver com isso. Elas estão ocupadas sustentando vacas. Quando os físicos dizem que um elétron não tem partes, eles estão falando de elétrons, não do significado das palavras que podem denotá-los. Assim como Euclides. Sua primeira definição parece muito menos uma definição apropriada do que um fato sobre os pontos: que eles não têm partes.

Em suas 23 definições, Euclides embaça a linha entre suas reivindicações e os termos que define. Ele não é exatamente um mestre das distinções. Suas definições são, por essa razão, comoventes. Elas revelam uma grande mente entrando insegura num espaço que os lógicos só dominariam plenamente 2 mil anos depois. As definições são o que parecem: uma instrução, um guia para os pensamentos de Euclides, um caminho no labirinto.

A GEOMETRIA É O ESTUDO das formas no espaço. Uma não existe sem a outra. O plano genérico – Euclides deixa claro em sua definição 5 – tem duas dimensões no comprimento e na largura. O que é uma dimensão, e por que existem duas dimensões? Comprimento e largura são termos da experiência comum – mãos esticadas ou uma sobre a outra, como se medindo o tamanho de um peixe. A terceira dimensão do espaço costuma ser representada estendendo-se uma palma plana para a frente – *dentro* – e depois retraindo-a – *fora*.

Essa reversão à experiência pode sugerir que o plano euclidiano é simplesmente tudo o que sobra quando uma dimensão do espaço é deixada de fora das três dimensões originais do espaço. É uma posição impossível de errar.

Indiferentes ao vigoroso senso comum, autores de livros-texto dizem que o plano tem duas dimensões porque dois números são suficientes para identificar qualquer ponto. Mas dois números são suficientes para identificar qualquer ponto no espaço se o espaço tiver *duas* dimensões, não o contrário. Não deixa absolutamente claro que isso é um progresso como comumente se supõe. Se tivéssemos alguma compreensão analítica de como exatamente pontos abrangem um espaço de duas dimensões, não haveria necessidade de se referir a dois números; se não, de que serve essa referência?

Mesmo assim, a introdução de comprimento e largura por Euclides não é inteiramente mal-colocada. A referência à possibilidade de os objetos geométricos se moverem, ou serem movidos, está latente em *Os elementos*. É a possibilidade por trás da Proposição 4, e por isso o ponto de coordenação para o sistema de igualdade de Euclides, no qual ele considera formas como mesmas ou diferentes. Não chega a fazer diferença se um objeto geométrico, ao resolver vagar por suas premissas, move-se por si mesmo ou é movido pelo geômetra. Com o movimento atribuído a figuras geométricas, de quantas maneiras poderiam algumas delas se mover? O comportamento de uma bola de gude sobre uma mesa de vidro sugere possibilidades sem fim. E isso é verdadeiro; não há fim. O que a questão exige, contudo, não é um cálculo total, mas um tipo de classificação, uma redução aos fundamentos pelos quais o que a bolinha de gude em movimento faz pode se reduzir a um esquema finito.

Há três maneiras de se mover no plano: por *translação*, num movimento direto para a frente sobre qualquer linha reta conveniente; por *rotação*, descrevendo um arco a partir de um ponto; e por *reflexão*, como quando os dois terríveis olhos de um

peixe, tendo olhado a partir do plano, são persuadidos a olhar para o plano por uma questão de bom senso.

Esse é o esquema finito.

EXISTEM TRÊS GRAUS de liberdade no plano euclidiano, dizem os geômetras – uma frase agradável e um lembrete de que, mesmo em matemática, existem ligações entre ideias austeras e abstratas – graus – e ideias que se referem à atividade humana – liberdade. Se existem três graus de liberdade, então são duas dimensões. Uma pequena fórmula coordena os graus de liberdade e dimensionalidade: $n(n+1)/2$, onde n são as dimensões do espaço, e $n(n+1)/2$, os graus de liberdade.

Uma coisa – a dimensão do espaço – tem sido definida nos termos de outra coisa – seu grau de liberdade –, mas existe uma trilha longa e brilhante deixada para trás por essas ideias que leva à ideia mais primitiva de algum movimento mental com o qual o *geômetra* vai e volta entre as dimensões, fazendo observações e vendo coisas onde na vida real nenhuma observação poderia ser feita e nada poderia ser visto.

O ESPAÇO EUCLIDIANO TEM um traço de comedimento nas veias; isso fica claro na definição 23 de Euclides. A palavra *infinito* não aparece na definição. O que Euclides diz é que linhas retas podem ser produzidas *indefinidamente* em ambas as direções. Há espaço suficiente e necessário, deduz-se, para abranger uma linha reta sempre em expansão. Todavia, a definição é peremptória, deixando de fazer distinções que clamam para ser feitas. Há uma diferença, afinal, entre um espaço ilimitado e um espaço infinito. A superfície de uma esfera é ilimitada mas não infinita, e uma sequência de frações diminuindo até zero é infinita mas não ilimitada. Exatamente um século antes do texto de Euclides, Zenão de Eleia proporcionou uma discussão sobre infinidade e seus paradoxos que até hoje continua inigualável em sua sutileza. É possível que Euclides tenha

dito só o pouco que disse por ter compreendido que não ganharia nada dizendo mais.

Por que criar confusão?

SOBRE O PLANO, Euclides tem duas coisas a dizer. Uma linha reta, ele afirma em sua definição 4, jaz uniformemente com os pontos sobre si mesma, e, em sua definição 7, Euclides faz exatamente a mesma afirmação para o próprio plano. O plano jaz uniformemente com suas linhas retas em si mesmo. O contraste é entre linhas retas e curvas, entre o plano e o plano de nível e outras superfícies, como a superfície de uma esfera.

A ideia de plano tem certa valência emocional que vai bem além da geometria. Ideias, champanhe e tórax podem ser planos; normalmente não é uma coisa boa. Em geral, a comparação a um plano remete a um nivelamento por baixo, a uma ausência de traços característicos. O plano euclidiano é o mesmo em toda parte. Isso levanta a questão: o mesmo em relação a *o quê?* No conceito de superposição, ou coincidência de forma, a geometria euclidiana admite a ideia de que figuras euclidianas podem ser movidas. Os triângulos da Proposição 4 são congruentes a si mesmos, a despeito de como mudam de posição ou são mudados de posição pelo plano. As figuras euclidianas são indiferentes à falácia de que a distância faz diferença. *Caelum non animus mutant qui trans mare currunt*, como observou Horácio. Elas mudam o céu, mas não suas almas que fogem pelo mar.

Mas se o plano euclidiano é homogêneo, não se pode dizer que seja achatado. A esfera é a mesma por toda parte, assim como a geometria da Terra, como bem sabem os viajantes fatigados. A Terra não é plana.

NO CÁLCULO INFINITESIMAL, a curvatura de uma linha é definida por uma referência à retidão das linhas retas; elas não têm curvatura nenhuma. Em seu tratado *Relativity and Geometry*, o físico Roberto Torretti escreve que “a curvatura de um plano curvo em um ponto mede a taxa pela qual a curva está mudando a direção”. A curvatura

é um enfraquecimento. Torretti acrescenta então algo maravilhosamente vívido. O que a curvatura realmente mensura num ponto é a extensão com que uma curva está “abandonando a retidão”.

Superfícies, bem como curvas, podem sair da retidão. Se o plano fosse equilibrado sobre o topo de uma esfera, como um livro equilibrado sobre uma maçã, poderíamos dizer que a esfera está curvada em seu ápice, em virtude das crescentes distâncias entre o plano e a superfície da esfera. A esfera empreendeu sua própria partida.

Para enxergar isso, um observador precisaria de uma complicada manobra na qual maçã e livro, plano e esfera, estejam de alguma forma encaixados em um espaço tridimensional, a dimensão extra requerida para colocar os dois objetos em justaposição. O resultado é uma medida padrão de curvatura e portanto de planura – curvatura *extrínseca*, para usar um nome sugestivo dado por matemáticos –, com a curvatura agora como uma propriedade relativa, um espaço curvado quando medido pelos padrões de outro, quase como se o torto só pudesse ser compreendido em comparação ao que é reto. Trata-se de um princípio conhecido e útil na justiça criminal, bem como na física matemática.

Não há, todavia, determinação definitiva para uma curvatura extrínseca. A esfera é curvada quando medida em comparação ao plano. A primeira tem curvatura positiva – ela incha – e o segundo não tem curvatura alguma. Ele é plano. Mas onde está a planura?

SERÁ QUE EXISTE UMA MEDIDA de planura acessível a um observador dentro de um espaço bidimensional, digamos, para uma formiga? Poderia essa formiga, limitada a vagar pelo quadro-negro para sempre, *descobrir* que o quadro-negro é plano? A resposta foi dada por Carl Friedrich Gauss num notável teorema que ele publicou sob o título *Theorema Egregium*. A curvatura intrínseca de uma superfície, Gauss demonstrou, pode ser deduzida inteiramente usando pistas locais como ângulos e distâncias e a maneira como elas mudam sobre a superfície. Não é necessário nenhum apelo a

espaços além da superfície e, mais ainda, as curvaturas intrínseca e extrínseca coincidem, e coincidem perfeitamente.

Ao chegar a essas conclusões, Gauss foi bem além de qualquer coisa na geometria euclidiana. Seu *Theorema Egregium* é uma realização notável, mas é uma realização notável em geometria diferencial, um dos inúmeros casamentos mistos em matemática, nesse caso entre o aparato analítico do cálculo diferencial e as preocupações clássicas da geometria euclidiana. Euclides não discutiu a geometria diferencial e não poderia ter previsto seu desenvolvimento.

ATÉ AQUI, TUDO BEM.

O que há entre dois pontos no plano euclidiano? Uma das respostas é nada. Esta é a resposta sugerida por Demócrito no século V a.C. Na natureza há apenas átomos e vácuo, argumentava Demócrito, com a teoria atômica da matéria brotando das pontas de seus dedos. Os antigos átomos eram indivisíveis e indestrutíveis. No século XXI, esses átomos deram lugar às partículas elementares, mas a ideia de uma dissecação radical de objetos materiais em suas partes permanece tão imperecível quanto os próprios átomos.

Há uma diferença considerável entre um átomo físico e um ponto euclidiano, ao menos porque um é físico e o outro não. Mas Euclides, em seu estudo, pode muito bem ter sentido Demócrito às suas costas, um fantasma cinzento pendurado em seu ombro – como fazem os fantasmas com tanta frequência –, o ponto de um homem é a idealização de átomo de outro. Nada entre átomos; nada entre pontos; e, assim, nada ao redor.

Seja como for que tenha se envolvido no estudo de Euclides, Demócrito não estava sozinho. Parmênides, seu predecessor, também estava lá, sussurrando. Em algum momento do século V a.C., Parmênides compôs um longo poema intitulado “Sobre a natureza”. Sobrevivendo em fragmentos, sua voz chega a nós por meio de uma longa distância, ressecada pelo sol, meio louca, delirante. E não é nada moderna.

“O que é, é”, diz Parmênides, e o que não é “não é”.

É difícil imaginar uma objeção sendo formulada. Teria alguém no século V a.C. proposto que o que é, não é, ou que o que não é, é? Porém, a partir da premissa de que afinal nada é nada, Parmênides chegou à conclusão de que não há vácuo entre átomos, porque não faz sentido dizer de um vácuo que ele é.

Segue-se então que o espaço é apenas uma coisa, e não muitas coisas. O que, além da separação espacial, poderia marcar a distinção entre átomos, ainda mais se, como pontos euclidianos, eles não têm partes? Se o espaço for preenchido, o movimento e – certamente – a mudança são impossíveis. Não há lugar para ir, e, se não há lugar para ir, tampouco existe um ponto de onde se tenha vindo.

Essas estranhas ideias pertencem ao mundo pré-socrático, que na imaginação popular contrasta desfavoravelmente com o nosso. Mas Euclides viveu e trabalhou no interior da memória histórica dos filósofos pré-socráticos. Parmênides estava tão perto de Euclides quanto Abraham Lincoln está perto de nós. Os dedos ossudos de Parmênides estavam cutucando o ombro de Euclides.

Se há pontos no plano, então o espaço euclidiano está repleto de pontos, pois entre dois pontos euclidianos ao longo de qualquer linha reta existe sempre um outro ponto euclidiano. A inferência é quase imediata. A definição 3 de Euclides identifica os finais de uma linha com dois pontos, e sua definição 23 estabelece que uma linha reta pode ser produzida indefinidamente. Vamos supor que *não* existe nenhum ponto entre os pontos P e Q sobre a linha reta L. Então, começando em P, L não poderia ficar sem Q. Supondo-se que faltasse qualquer outro ponto, um de seus finais oscilaria inutilmente. Nesse caso, como poderia L ser produzida a partir de P?

Esta descida redutiva, segundo a qual pontos levam a pontos, deve, pode-se imaginar, terminar com nada entre os pontos ou com algo ainda mais além. É uma inferência em conflito com o geômetra, ansioso por chegar de um ponto a outro.

Se nada, como? Se alguma coisa, o quê?

NESSA COMPETIÇÃO ENTRE fantasmas em luta, Parmênides fez com que sua influência fosse sentida. Demócrito também. Os pontos euclidianos bem que podem ser como os átomos, mas o vácuo não existe em lugar nenhum de *Os elementos*, nenhuma indicação de que não existe nada entre os pontos. Para Euclides, são pontos do começo ao fim.

Essa discussão está longe do fim. Em seu pequeno livro *Das Kontinuum*, o matemático do século XX Hermann Weyl viu-se interrogando os pré-socráticos outra vez. Há realmente uma multidão no estudo de Euclides. Entre quaisquer dois pontos, existe um terceiro. Mas o tempo flui, as coisas mudam, e surge uma distinção entre o fluxo do tempo e os pontos usados para marcar esse fluxo. Os pontos são como diamantes numa meada de seda: é só esperar que eles se enredam. Mas enquanto o tempo flui, eles não se enredam. “A visão de um fluxo”, escreveu Weyl, “consistindo em pontos e, portanto, também se dissolvendo em pontos revela-se um equívoco: precisamente o que nos ilude é a natureza da continuidade, o fluir de ponto a ponto; em outras palavras, o segredo de como o continuamente duradouro presente pode continuamente escoar para o passado retrocedente.”

Sobre essas questões, Euclides não disse absolutamente nada.

5. Os axiomas

Nempe nullas vias hominibus patere ad cognitionem certam veritatis praeter evidentem intuitum, et necessariam deductionem. (Existem apenas dois caminhos abertos aos seres humanos para chegar ao conhecimento saudável da verdade: intuição evidente e dedução necessária.)

RENÉ DESCARTES

A mente obtusa, uma vez chegada a uma inferência que adula o desejo, raramente é capaz de reter a impressão de que a noção da qual a inferência partiu era puramente problemática.

GEORGE ELIOT

EUCLIDES PROPÔS CINCO AXIOMAS para a geometria. Estes axiomas não podem, é claro, ser eles mesmos derivados de suposições ulteriores. Ou de qualquer outra coisa. “Nenhuma ciência prova seus próprios princípios”, observa secamente Aristóteles. É possível, por certo, que se alguns teoremas fossem tornados axiomas, então alguns axiomas poderiam ser tornados teoremas. O lógico americano Harvey Friedman tem estudado, por essa razão, a extensão na qual algo estando sobre seus pés poderia se tornar algo sobre sua cabeça. Isso não significa que os axiomas de Euclides sejam injustificados ou arbitrários. Se fosse assim, que importância teriam? Euclides aceitava a autoevidência como justificativa para seus axiomas, ficou perturbado ao descobrir que nem todas suas suposições eram evidentes, nem mesmo para si próprio.

Os primeiros três axiomas de Euclides são comumente agrupados: “Deixemos o seguinte ser postulado”, escreve ele:

1. Traçar uma linha reta de algum ponto para algum ponto.

2. Produzir uma linha reta finita continuamente numa linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e distância.

Essas afirmações dificilmente podem ser consideradas controversas. Elas parecem fazer perfeito sentido. Dois pontos, uma linha reta. O que poderia ser mais simples? Mas, ainda que intelectualmente conciliatórios, esses axiomas são também desconcertantes. Eles cedem ao leitor poderes próprios aos matemáticos ou, se não aos matemáticos, por certo não aos leitores: *traçar*, *produzir* e *descrever*.

E se o leitor, relutante em fazer qualquer coisa, relutar em traçar, produzir ou descrever? Ou se não souber como? E daí? “A geometria não nos ensina a traçar essas linhas”, observou Isaac Newton no *Principia*, “mas requer que elas sejam traçadas.”

Geômetras euclidianos têm tradicionalmente explicado os três primeiros axiomas de Euclides referindo-se a uma régua e um compasso. Em seu maravilhoso compêndio de geometria euclidiana, *Geometry, Euclid and Beyond*, o matemático contemporâneo Robin Hartshorne nota que as provas de Euclides são “realizadas com instrumentos específicos, a régua (ou traçador) e o compasso”. Mas nenhum instrumento é especificado em *Os elementos*. Fiel à sua política de dizer o menos possível, o próprio Euclides nunca menciona uma régua ou um compasso em *Os elementos*. Tampouco o faz Hartshorne. Ao menos quando define uma construção geométrica, Hartshorne abjura régua e compasso e prefere escrever sobre “números construtíveis”.

Tendo sido introduzidos em algum momento após Euclides ter posto de lado seu buril, a régua e o compasso desfrutaram de sucesso bastante considerável. Estudantes apreciam espetar papel com a ponta de um compasso e desenhar círculos a esmo. Algumas coisas podem ser feitas com apenas esses dois instrumentos, outras coisas não. Isso contribuiu para uma interessante série de descobertas. É impossível tornar um círculo quadrado usando apenas régua e compasso, e também é impossível trissecar um

ângulo arbitrário. Num celebrado teorema, Gauss demonstrou que um polígono com dezessete lados poderia ser construído com o uso de uma régua e um compasso.

A introdução de régua e compasso faz muito pouco para desanuviar a inquietação transmitida pelos três primeiros axiomas de Euclides: uma sensação de inutilidade.

Entre quaisquer dois pontos, é possível traçar uma linha reta. Isso é puro Euclides, o Euclides de *Os elementos*.

Depois há o Euclides revisado: entre quaisquer dois pontos, é possível traçar uma linha reta usando uma régua.

Agora um lembrete: uma régua é uma borda terminando numa linha reta. O que mais poderia ser?

Em consequência, a conclusão é que é possível traçar uma linha reta com uma linha reta.

Uhu!

NOS SÉCULOS XIX E XX, matemáticos com mentes sagazes e apressadas ofereceram a Euclides sua assistência retrospectiva dizendo o que ele pretendia. Aquela história de traçar, produzir e descrever? Nada disso. Eles reformularam os axiomas de Euclides como afirmações de existência e singularidade. Existe alguma coisa, meu Deus, mas é uma coisa só.

1a. Entre dois pontos distintos existe uma única linha reta.

2a. Para qualquer segmento de linha reta existe uma única extensão.

3a. Para qualquer ponto existe um único círculo de raio fixo.

Esses axiomas controlam a maneira como o universo euclidiano é preenchido. Eles são muito poderosos: fornecem uma definição implícita da própria forma. Uma forma euclidiana é aquilo, seja o que for, que exista a partir dos três primeiros axiomas de Euclides ou pela aplicação repetida de seus três primeiros axiomas. As

construções euclidianas eram uma tentativa de capturar em movimento físico um poder lógico da mente. Isso acabou. É a seta de inferência que se move. Nada mais.

EM TUDO ISSO, está faltando alguma coisa ou, se não faltando, algo está errado. Os axiomas de Euclides pressupõem a existência de pontos. Para onde mais essas linhas retas se dirigiriam se não entre elas? No entanto, Euclides jamais afirmou que existem quaisquer pontos, sem falar de um universo deles.

Aos três primeiros axiomas de Euclides deve ser acrescentado um axioma ainda mais fundamental: de que há pontos. E mais, que há uma infinidade de pontos, um conjunto infinito de pontos nas geometrias modernas, uma coleção ou agrupamento deles, ou mesmo um único ponto com poderes tântricos de multiplicação. Qualquer que seja a imagem, tais pontos existem antes de qualquer outra coisa, e, na geometria euclidiana, eles devem existir para que qualquer outra coisa exista.

Um universo de pontos por si só não deixa tudo claro onde antes algumas coisas eram escuras. É falso que *quaisquer* dois pontos podem ser unidos por uma linha reta, pois a menos que se pense num ponto como a cabeça encolhida de uma linha reta, nenhuma linha reta pode unir um ponto a si mesma. Será que deveríamos dizer, em vez disso, que quaisquer dois pontos *distintos* podem ser unidos por uma linha reta? O que torna os pontos distintos? Não pode ser nada relacionado com suas propriedades internas. Eles não têm nenhuma. Dizer que dois pontos são distintos apenas porque estão separados no espaço é suscitar a pergunta: o que os separa? E se a resposta for uma linha reta, ninguém ganhou nada.

Faltam aos três primeiros axiomas de Euclides a faísca da impecabilidade lógica e precisão, mas talvez não falte alcance. Eles estão fazendo o trabalho de criação. Seria um milagre se fizessem algo mais do que isso.

O QUARTO AXIOMA de Euclides afirma que:

4. Todos os ângulos retos são iguais.

Esse axioma é notavelmente diferente dos três primeiros axiomas de Euclides. Ele não diz que algo existe, a não ser os ângulos retos. Os três primeiros axiomas de Euclides têm como objetivo pôr as coisas a caminho. O quarto pretende estabelecer uma identidade amistosa entre ângulos retos, uma irmandade. Contudo, seja qual for a identidade dos ângulos retos, sua natureza deve ser abrangida pelos três primeiros axiomas de Euclides, junto com a assistência decorativa de suas definições.

Como isso poderia ter funcionado? Os geômetras antigos ficaram divididos. Um ângulo reto?

Geômetra A: Um ângulo reto é formado quando duas linhas retas são cruzadas na perpendicular.

Geômetra B: Duas linhas retas são cruzadas na perpendicular quando elas formam dois ângulos retos.

Geômetra C: Dois ângulos retos surgem quando duas linhas retas são cruzadas na perpendicular.

Geômetra D: Senhores, senhores.

Antes que ângulos retos sejam declarados iguais, seria de imensa ajuda saber o que é um ângulo em primeiro lugar. A esse respeito, o axioma de Euclides é mais ou menos como declarar que todos os irmãos próximos são competitivos. O que é um irmão? Então, mais uma vez, o que é um ângulo?

Euclides diz em sua definição 8 que “um ângulo plano é a inclinação de uma linha em relação a outra num plano onde encontram uma a outra e não estão numa linha reta”. Em sua definição seguinte, Euclides parece sugerir que um ângulo é, por sua definição prévia, o que um ângulo *contém*. É melhor não entrar nessa. Ao revisar a geometria de Euclides no início do século XX,

David Hilbert considerou a definição 8 de Euclides e achou que ficaria melhor com um pouco de polimento mostrar o bronze por trás das manchas (ver o sistema de Hilbert no Capítulo 8). “Seja α um plano arbitrário”, escreve Hilbert, “e h e k dois semirraios distintos em α e emanando do ponto O de modo a formar uma parte de duas linhas retas diferentes. Chamamos de ângulo o sistema formado por estes dois semirraios h , k .” Um ângulo é assim uma questão de duas linhas retas saindo suavemente de um ponto comum.

Mas a definição de Hilbert suscita a pergunta: quando esses sistemas o são mesmo e quando são diferentes?

Tanto Euclides quanto Hilbert apelaram a algum princípio geral sob o qual ângulos de qualquer tamanho são considerados iguais ou desiguais. É fácil inventar um princípio. Considere dois ângulos bem separados no espaço. Dois ângulos, e assim dois sistemas. Dois sistemas, e assim quatro linhas retas ao todo e dois pontos. Dois sistemas tais, e portanto dois ângulos tais, são iguais se coincidirem.

Ao concordarem com isso, Euclides e Hilbert parecem bem satisfeitos.

Mas, para determinar se dois ângulos bem separados no espaço coincidem, Euclides e Hilbert devem supor que um sistema é movido de modo a ser imposto sobre o outro. Mas, se movido, o será de tal maneira que seu *próprio* ângulo permaneça inalterado. Isso requer um compromisso com a homogeneidade do espaço, a ideia de que as figuras euclidianas não mudam de forma conforme são movidas no espaço. Como isso poderia ser estabelecido sem um cálculo antecedente da identidade dos seus ângulos?

Não é que a definição de Euclides esteja manchada. Parece não haver bronze por baixo da definição, não importa o quanto a superfície for polida.

O QUINTO E ÚLTIMO AXIOMA do sistema de Euclides é mais famoso que os outros quatro. Consta que Euclides ficou perturbado, que se

contorceu, chiou, se remexeu e assobiou antes de aceitá-lo:

5. Se uma linha reta cruzar duas linhas retas e formar ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se produzidas indefinidamente, encontram-se no lado em que estão os ângulos menores do que dois ângulos retos.

O axioma é perturbador, porque parece avaliar a propriedade do paralelismo por uma referência ao que ele não é. As duas linhas retas do teorema convergem em um ponto; elas não são paralelas. Acontece que o quinto axioma de Euclides trata de linhas que *são* paralelas. O que há com elas?

Uma versão do século XVIII do axioma, creditada ao matemático escocês Francis Playfair, é bem mais intuitiva do que a de Euclides, e como os matemáticos se deram conta quase ao mesmo tempo, as duas versões são logicamente equivalentes:

- 5a. Uma e apenas uma linha reta pode ser traçada passando por qualquer ponto P no plano paralelo a uma dada linha reta AB.

O trecho “pode ser traçada” é permissivo quando permissão não é necessária. O axioma comunica que, além de ser única – “uma e apenas uma” –, uma linha paralela à AB passando por P *existe*.

Proposta aceita, moção adotada. O axioma de Playfair diz que, para um ponto fora de uma linha dada, existe uma e apenas uma linha paralela à linha dada.

O axioma de Playfair completa a estrutura axiomática da geometria euclidiana.

É o último.

CONSTA QUE EUCLIDES ficou incomodado com esse axioma, porque ele parecia mais complicado que os demais. Segundo outros relatos, o axioma lhe parecia menos evidente. Outros relatos ainda atribuem a Euclides a convicção contrária de que o postulado das

paralelas é suficientemente simples para ser um teorema. Essas suas dúvidas são hoje consideradas como evidência da magnífica intuição lógica de Euclides. Ele sabia que algo estava errado ou, se não errado, não certo.

Seria ótimo ter um duplo de Euclides disposto a juntar-se à discussão e introduzir no registro algumas dúvidas sobre essas dúvidas. O que poderia ele dizer, esse Euclides capengando ao longo do caminho que Euclides nunca escolheu? Uma das coisas, espero, seria rejeitar a ideia de que o quinto axioma é mais complicado do que os outros axiomas. Complexidade requer uma medida, ou métrica, o que não é o caso desses axiomas apresentados. Tenho certeza de que um geômetra poderia afirmar que o primeiro axioma de Euclides é o mais complicado de todos, por nenhuma razão específica. O fato de o axioma de Playfair ser mais simples que o axioma introduzido por Euclides é prova de que um e outro podem ter tanto uma formulação simples quanto uma complicada.

Um Euclides imaginário poderia também se mostrar inclinado a contestar o *petit soucis* do Euclides real, que diz que seu quinto axioma pode não ser evidente. *Mais non!* Se um axioma não é autoevidente, de alguma forma ele deve despertar a suspeita, embora longamente procrastinada, de que pode ser falso. É por essa razão que ninguém acha que a afirmação de que a neve é branca é autoevidente. Verdade, sim; evidente depois de uma inspeção, também; autoevidente, não. A negação de autoevidência requer alguma contingência imaginativa de que a neve é branca, mas que poderia ter tido variedade negra.

Mas o postulado das paralelas de Euclides é verdadeiro sob as circunstâncias em que Euclides o esboçou sobre a prancha empoeirada, e não existe uma maneira óbvia de que possa ser falso. O axioma das paralelas é não provável; um axioma é uma suposição. Mas tampouco é um axioma obviamente negável. Se fosse obviamente negável, seria possível obviamente negá-lo.

Como isso prosseguiria, esse exercício imaginativo?

Os matemáticos modernos, contudo, enxergaram melhor e mais longe do que qualquer um de nossos Euclides. O postulado das paralelas é anômalo. Ele não é necessário. Pode ser dispensado.

Mas, em qualquer mundo no qual o postulado das paralelas falha, será porque o espaço subjacente mudou ou porque certos termos geométricos comuns, tais como distância, receberam um novo significado. No universo idealizado que Euclides descreveu, ele não falha de maneira alguma.

6. O maior Euclides

Si les triangles faisaient un dieu, ils lui donneraient trois côtés. (Se triângulos tivessem um deus, eles lhe dariam três lados.)

VOLTAIRE

Os elementos DE EUCLIDES PERTENCE a uma curiosa tradição, que criou e agora encarna – a pastoral da escalada da montanha. Os matemáticos se consideram homens na subida. “O estudo e a pesquisa matemáticos lembram o alpinismo”, observou o matemático inglês Louis Joel Mordell, recordando com satisfação que quando Edward Whymper escalou pela primeira vez o monte Cervino, quatro de seus colegas morreram na subida. O gênero é pastoral porque *Os elementos* expressa a intensa exigência de Euclides por um mundo idealizado, em que as coisas estão livres do atrito, e as inferências são lisas como gelo. Em seu influente estudo *Some Versions of Pastoral*, William Empson identificou a pastoral com o imperativo “colocar o complexo no simples”. O que poderia ser mais euclidiano? *Os elementos* de Euclides é uma dessas raridades: é o melhor exemplo de si mesmo.

Se os teoremas de *Os elementos* são seus picos, as demonstrações são um registro de suas escaladas. Em algumas, Euclides chega ao topo rapidamente; em outras, é obrigado a gemer e a se arrastar. Independentemente das provas que oferece, Euclides espera que o leitor compreenda o drama que implicaram. As demonstrações transmitem tensão, alívio, triunfo. Permitem ao leitor vivenciar o desconforto do autor à distância.

Mas por que fazer o que Euclides já fez? *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.* Esta é a Proposição 5 de Euclides. Qual é o sentido de provar tudo de novo? Se a pergunta é surpreendentemente comum, a resposta euclidiana é incomumente

rigorosa. Euclides via na ascensão demonstrativa sua própria recompensa. “Não existe uma estrada real para a geometria”, ele replicava com desprezo quando um insultuoso Ptolomeu (Ptolomeu Soter) reclamava que suas provas eram muito difíceis.

Sem trabalho, não se ganha nada; sem trabalho, não se aprende nada; sem trabalho, nada.

Isso também é uma parte da tradição euclidiana, sua insistência moral.

GEORGE MALLORY TENTOU CHEGAR ao topo do monte Everest em 1924 e morreu na tentativa. Sob circunstâncias menos severas que as do Everest, colegas alpinistas observaram, Mallory subiria numa montanha como um quadrúpede energético. Essa não é a maneira de Euclides. Suas provas são compostas de pequenos e detalhados passos lógicos, mas precisos e delicados. Eles devem ser dados, um após outro. Não é fácil. E não é fácil porque o método da prova é uma coisa, e sua matéria, outra. Mas a geometria euclidiana envolve a mesma atenção bifurcada que caracteriza as ciências físicas. Para descrever o arco de uma bala de canhão em voo, o físico, em busca de mais precisão do que pode ser propiciada por *lá vai ela*, deve usar o aparato analítico do cálculo diferencial. O cálculo é novo; o padrão, antigo. É um padrão exatamente tão antigo quanto *Os elementos*.

Não se lê uma demonstração euclidiana com leveza. As etapas são fáceis porque cada etapa é pequena, mas etapas não podem ser saltadas, e é muito difícil manter em mente todas as etapas envolvidas numa demonstração. Um complexo diagnóstico diferencial em medicina, ou uma súmula num contrato, tampouco são fáceis de ler, mas uma demonstração euclidiana, embora simplificada por símbolos de abreviação, é mais difícil do que qualquer documento de medicina ou direito. Lápis e papel ajudam. Diagramas são ótimos. As páginas de *Os elementos* de Euclides são ilustradas. Exige-se paciência, sem dúvida, e também um gosto por altitudes alpinas.

Não é necessário acreditar na minha palavra: considere as do mestre.

Proposição 1

“Sobre uma dada linha reta finita”, diz Euclides, é sempre possível “construir um triângulo equilátero.”

Essas são as primeiras palavras de sua primeira demonstração. Em suas definições 19 e 20, Euclides define figuras retilíneas – figuras contidas por linhas retas – e triângulos equiláteros: triângulos com três lados iguais. Mas nem suas definições, nem as noções comuns e nem seus axiomas dizem que qualquer deles existe, e nada que veio antes conferia a Euclides a mais leve indicação de que está em seu poder produzir ou criar essas figuras.

Ao enunciar seu primeiro teorema, Euclides usa o infinitivo *construir*. Eu usei *criar*. Na verdade, nada é construído nem criado. Os triângulos equiláteros sempre estiveram por aí. Os triângulos euclidianos são abstratos. Os *elementos* não descreve nada físico, e triângulos puros platônicos não aparecem e desaparecem da existência. A demonstração de Euclides os revela como formas no sentido em que seus axiomas estabelecem sua existência. A manobra euclidiana tem algo em comum com xeque-mates que despontam no xadrez, quando alguma peça irrelevante é trocada de posição para revelar a devastadora e inexorável combinação que estava disfarçando. E algo em comum com certas experiências paisagísticas, como a pequena colina sendo escalada, um pico há muito oculto subitamente revelado.

“SEJA AB UMA LINHA reta dada.”

Usando A como ponto fixo, Euclides deduz imediatamente a existência do círculo BCD e se refere ao seu terceiro axioma para justificar essa etapa (Figura 6.1).

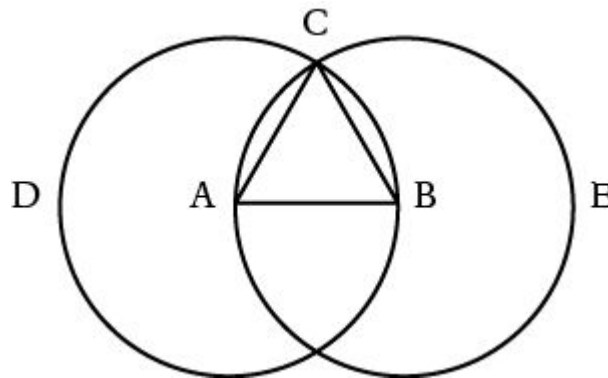


FIGURA 6.1. Proposição 1

Um círculo merece outro: este, ACE, cujo centro é B. O terceiro axioma – mais uma vez.

Esses círculos, Euclides agora afirma, devem se encontrar em um ponto C. Mas, para o primeiro axioma, quaisquer dois pontos determinam uma linha reta. Nesse caso, as linhas CA de C para A, e CB de C para B.

Com essas linhas retas estabelecidas por dedução, aparece o triângulo ABC; sua base é a linha reta AB com a qual Euclides começou sua demonstração, e seus lados são as linhas retas CA e CB. (Não importa, devo dizer, se a linha CA é designada como CA ou AC – embora, suponho, algum maníaco lógico possa perguntar por que não importa.)

Agora, o ponto A é o centro do círculo BCD. Em suas definições 15, 16 e 17, Euclides disse que dado um círculo, todas as linhas retas de seu centro à sua circunferência são iguais. A partir disso, Euclides conclui que AC é igual a BA.

Mas Euclides já tinha estabelecido que AC é igual a AB. Segue-se que CA e CB são ambas iguais a AB. Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si. É a terceira noção comum de Euclides. Vem a calhar, não?

Assim, o triângulo ACB é equilátero.

Feito.

MUITO CURTA, a demonstração de Euclides é psicologicamente mais curta do que parece por fazer apenas uma exigência ao leitor ou ao estudante: que ele ou ela reconheçam que todos os raios de um dado círculo são iguais a todos os outros raios. A demonstração é uma consequência dessa ideia. Euclides conseguiu perfeitamente elaborar uma poderosa máquina sem fazer nada mais do que funcionar o seu motor. Mesmo assim, seria injusto celebrar esta pequena prova sem mencionar alguns reparos. “É surpreendente”, observou o matemático contemporâneo D.E. Joyce, “que uma demonstração tão curta, clara e compreensível possa estar tão cheia de furos.”

Furos? E em Euclides também! Observe o primeiro passo que Euclides dá. Seu axioma estabelece que existe uma única linha reta entre quaisquer dois pontos distintos, mas não há pontos na demonstração a seguir, ou em qualquer outro lugar em Euclides, para ancorar a linha AB.

O ponto de intersecção C é a fonte de um segundo reparo, pois o que fez Euclides pressupor que as linhas retas AC e BC devem compartilhar seu vértice em C?

Aliás, o que fez Euclides pressupor que três linhas retas iguais devem conter um triângulo? Dizer que as linhas são iguais é dizer uma coisa; dizer que são os lados de um triângulo é dizer algo completamente diverso.

E reparos sobre construção – que devem ser acrescentados ao que já é uma lista constrangedora. Ao construir dois círculos, Euclides retirou a ponta do compasso do ponto A e colocou-a sobre o ponto B. Nada que Euclides tenha dito permitia que ele erguesse o compasso, ainda mais que nenhum compasso é jamais mencionado em *Os elementos*. Mas, nesse caso, como Euclides foi de A para B?

Mas vamos parar por aqui. Puristas, acalmem-se. Apesar de tudo isso, a demonstração de Euclides faz o que uma demonstração deve fazer: induzir uma convicção.

Proposição 5

Triângulos equiláteros são prisioneiros de sua simetria. Eles são os mesmos, não importa o ângulo pelo qual são vistos. Não fazem nada e não vão a lugar algum. Não é de admirar que existam tantos desses brutos atarracados por aí. O triângulo isósceles é bem mais refinado. Os lados de um triângulo equilátero são todos iguais. Os lados opostos de um triângulo isósceles são iguais, mas cada base é independente. A diferença é artisticamente importante. Triângulos isósceles têm o poder de ascender. Arquitetos eclesiásticos formavam um triângulo isósceles com as pontas dos dedos e juntando os polegares para imaginar espaço afilando-se para cima a partir de sua base para a abóbada de uma grande catedral.

Há uma conexão que Euclides estabelece bem cedo em *Os elementos*, entre os lados e os ângulos da base de um triângulo isósceles. Que *existe* uma relação ou outra entre os lados e os ângulos da base de um triângulo isósceles, qualquer um pode notar com uma olhada. Mas a relação que Euclides afirma está um pouco adiante de algum ponto espontaneamente ratificado pelo senso comum. Se dois lados de um triângulo são iguais, então seus ângulos de base também são iguais. Trata-se de uma relação mais poderosa do que uma relação ou outra. Os lados de um triângulo são linhas retas, e os ângulos de um triângulo são pares de linhas retas. Há um tipo de governança em ação entre eles, de modo que as linhas impõem sua igualdade sobre os ângulos aos quais estão opostas. Isso não é uma coisa que alguém notaria com uma olhada.

A Proposição 5 de Euclides também é conhecida como *pons asinorum* ou ponte de asnos. O recurso a uma ponte reflete a ilustração de Euclides (Figura 6.2), que parece descrever um viaduto de cavaletes, mas esses asnos sugeriram também algo mais, uma ponte intelectual que asnos de sala de aula são incapazes de cruzar. Nada, contudo, na prova de Euclides justifica sua reputação de dificuldade. A demonstração não é nem a mais

simples possível nem a mais elegante, mas oferece uma apreciação de Euclides na plenitude de sua maneira. E algo mais: a demonstração de Euclides revela uma quase perfeita coincidência entre a ilustração do teorema e as etapas lógicas necessárias para demonstrá-lo. Nem todas as demonstrações de Euclides são como esta, e nem todas suas ilustrações ou diagramas são tão esclarecedores nesse aspecto.

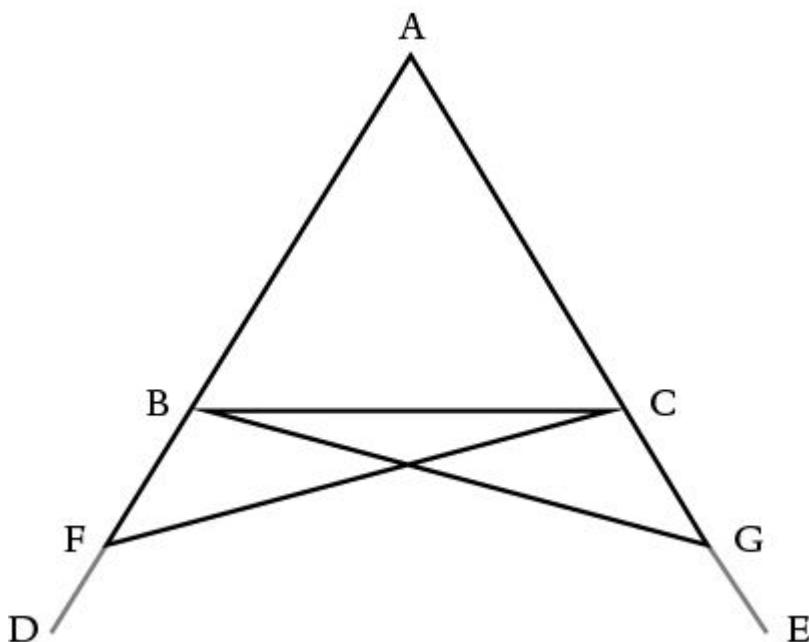


FIGURA 6.2. A ponte de asnos

“EM QUALQUER TRIÂNGULO isósceles ABC ”, afirma Euclides, “os ângulos da base são iguais um ao outro.” E mais, Euclides acrescenta, “se as linhas retas iguais são produzidas mais adiante, os ângulos sob a base [também] serão iguais um ao outro”. A estratégia da demonstração de Euclides é provar mais do que é necessário e concluir menos do que é demonstrado.

Com seu triângulo isósceles original dado em ABC , Euclides constrói uma ponte de B a C . Três etapas são exigidas para a construção, e alguma contabilidade para o argumento por vir. Euclides primeiro estende as linhas retas AB e AC para D e E , respectivamente. O segundo axioma de Euclides permite que linhas retas sejam estendidas, e Euclides estendeu duas delas.

Permissão solicitada; permissão concedida.

Euclides escolhe então um ponto F ao acaso sobre a linha BD , e conecta os pontos F e C com a linha reta FC . A conexão é justificada pelo primeiro axioma de Euclides, mas a ideia de uma escolha ao acaso é um exemplo do autor jogando conceitos fora e torcendo pelo melhor.

Uma terceira etapa, a última. Ao escolher um ponto G sobre a linha AE tal que AG é igual a AF , Euclides cria um escoro entre G e B . Seu primeiro axioma está em jogo pela segunda vez ao justificar o escoro. Isto é ótimo, mas o que justifica a reivindicação de que AG é igual a AF ? Trata-se, como sucede, de algo que Euclides já demonstrou. A Proposição 3 de Euclides afirma que dadas duas linhas retas desiguais, é sempre possível cortar da maior um segmento de linha igual à menor. Na demonstração da Proposição 5, AE é a linha maior e AF , a menor. G é escolhida em conformidade.

EUCLIDES REQUER AGORA a assistência de um velho amigo suspeito. É um amigo sobre o qual já expressei certas reservas, mas como disse Talleyrand num contexto completamente diverso, este não é o momento de fazer inimigos. Na Proposição 4, demonstrou Euclides, dois triângulos são congruentes se coincidirem em dois de seus lados e nos ângulos entre eles. Usando apenas essa proposição, Euclides pretende mostrar que os triângulos AFC e AGB são congruentes. Afinal, para que servem os amigos?

Já estabelecido: AF é igual a AG . Não há necessidade de estabelecer que AB é igual a AC . Afinal, ABC é um triângulo isósceles. Mas o ângulo FAG é comum a ambos os triângulos, AFC e AGB . A congruência é uma decorrência imediata e, com a congruência, pleno congresso entre ângulos associados. O ângulo ACF é igual ao ângulo ABG , e o ângulo AFC a AGB .

Usando novamente a Proposição 4, Euclides mostra agora que BF e FC são iguais a CG e GB . Mas os ângulos interiores BFC e

AGB também são iguais. Ou seja, AFC e AGB são congruentes. Assim, BCF e GBC também são congruentes.

A conclusão de Euclides cai agora como uma luva. O ângulo FBC é igual ao ângulo GCB, e o ângulo BCF é igual ao ângulo GBC. Mas o *todo* do ângulo ABG é igual ao *todo* do ângulo ACF. Subtraindo iguais de iguais, segue-se que os ângulos remanescentes ABC e ACB também são iguais. Estes, como Euclides observa com alegria, são exatamente os ângulos da base do triângulo isósceles ABC.

Feito.

O GRANDE MÉRITO DA DEMONSTRAÇÃO de Euclides é que ela realiza o seu trabalho; seu grande defeito é o de demorar tanto para fazer isso. O matemático grego Pappus apresentou uma demonstração da mesma proposição que é uma maravilha em termos de elegância e eficiência. Considere o triângulo isósceles ABC e sua reflexão ACB. O triângulo ACB é tão próximo ao triângulo ABC como sua imagem no espelho. Não há surpresa alguma nisso. Ele é a imagem no espelho. Em consequência, temos um par direto de identidades refletivas: $AB = AC$ e $AC = AB$. O triângulo ABC é, no final das contas, isósceles.

E um lembrete do que é óbvio: o ângulo ABC é igual ao ângulo ACB. É o mesmo ângulo.

Portanto, ABC é congruente com ACB, em virtude da Proposição 4 de Euclides.

A igualdade dos ângulos da base é decorrente – e também mais rápida.

Dulce.

Seco e afiado como um dente. Mas com uma reserva: nada nos axiomas, definições ou noções comuns de Euclides permitiria que triângulos, ou quaisquer outras figuras, fossem erguidos do plano e refletidos em si mesmos.

Proposição 47

O teorema de Pitágoras afirma que em qualquer triângulo retângulo existe uma relação simples entre o comprimento dos lados do triângulo a e b e sua hipotenusa h : $a^2 + b^2 = h^2$. A soma dos quadrados dos dois lados a e b de qualquer triângulo retângulo é igual ao quadrado de sua hipotenusa. Aparentemente já difundido entre os babilônios e revelado novamente por Pitágoras no século V a.C., o teorema de Pitágoras era bem conhecido antes que o mundo antigo estivesse exaurido. Testemunhas dizem que Pitágoras exclamou *eureka!* quando o descobriu. E, segundo outras, fez um sacrifício para os deuses na hora. Por ter envolvido um boi desinteressado por geometria, o sacrifício foi desagradável, mas o *eureka* não tanto. O poder do teorema é óbvio. Ele é grandioso. Numa afirmação notável e límpida, o teorema especifica uma relação geométrica entre triângulos e numa relação aritmética entre números. O teorema é tão poderoso que evoca o seu inverso. Quaisquer três números a , b e h tais que $a^2 + b^2 = h^2$ determinam um triângulo retângulo. É uma prova de uma assombrosa unidade entre as formas e os números, tornando a diferença entre os dois um acidente de aparência, o resultado de alguma simetria há muito quebrada ou uma inadvertência de como devem ser enxergados.

É por meio do teorema de Pitágoras que o conceito de distância fica sob controle geral da matemática. Algum controle é necessário. A distância é uma extensão de algum tipo, um aspecto da geometria. É também um tipo de número, um aspecto da aritmética. É uma ou outra, ou ambas ou nenhuma. Mas seja qual for sua natureza, a distância é a resposta à pergunta *quão longe*, uma das grandes questões da raça humana, inferior apenas, suponho, a *quanto*. Tendo sido expresso como uma conclusão sobre triângulos retângulos, o teorema de Pitágoras também descreve a distância h entre quaisquer dois pontos em um plano, porque quaisquer dois pontos em um plano pode ser entendido como vértices de um

triângulo. Isso é simultaneamente mágico e maravilhoso: mágico porque trata-se de algo que responde a uma ideia não concebida de uma expansão atribuída a um número; e maravilhoso porque o número foi gerado por uma forma simbólica simples. Além da medida de distância bidimensional, há a distância em três dimensões e, na verdade, distâncias em n dimensões. A nobre família dos espaços métricos encontra sua linha paterna no teorema de Pitágoras.

A fórmula simbólica $a^2 + b^2 = h^2$ abrevia algebricamente inúmeros fatos aritméticos tediosos do tipo $3^2 + 4^2 = 5^2$. Em a , b e h , ela faz uso de símbolos indeterminados, e em $a^2 + b^2 = h^2$ ela impõe três operações matemáticas aos números que designam. Custou aos matemáticos um longo tempo até conseguirem entrar no mundo estonteante no qual tais símbolos pudessem ser manejados com confiança e facilidade. Esses símbolos foram burilados nos séculos IX, X e XI pelos grandes matemáticos do distante arquipélago da Arábia, mas não com confiança e facilidade e, até bem recentemente, com grande dificuldade. Mesmo os maiores matemáticos já desconfiavam que em álgebra, assim como no *Aprendiz de feiticeiro*, os símbolos que eles haviam dominado num contexto podiam se mostrar ingovernáveis em outro.

O aparato da álgebra moderna não se encontrava disponível para Euclides. Os *elementos* é um tratado de alcance simbólico limitado. Euclides se dá por satisfeito nomeando pontos, linhas e várias figuras de uma maneira óbvia, mas nunca se afasta dos nomes para considerar um esquema mais flexível, um aparato mais elegante.

A demonstração de Euclides do teorema de Pitágoras é, portanto, geométrica. Não há números, nenhum número é elevado ao quadrado, mas, em sua prova geométrica, Euclides encontrou uma forma de comunicar fatos aritméticos sem mencioná-los. Um grande teorema matemático tem muitas faces. É uma das ironias da história intelectual que o teorema de Pitágoras, que sugere a unidade da geometria e da aritmética, deva receber das mãos de Euclides uma demonstração puramente geométrica, quase como se o mestre não

conseguisse entender que na matemática, assim como em um rio, nunca existe só um lado ou o outro.

EM QUAISQUER TRIÂNGULOS COM ângulos retos, diz Euclides, o quadrado do lado oposto ao ângulo reto é igual aos quadrados dos lados que contêm o ângulo reto. Duas coisas são iguais a uma. Não números, mas formas. Mas se formas, então números também. A área de um quadrado expressa um número ao quadrado.

Na demonstração de Euclides, o triângulo retângulo ABC exigiu uma força magnética obscura da sua imaginação (Figura 6.3). Seus lados AB e AC são os lados do teorema pitagórico, e a hipotenusa BC é a hipotenusa. Tudo o mais no diagrama é ornamental e será abandonado quando a demonstração estiver completa, como um andaime sustentando um arco.

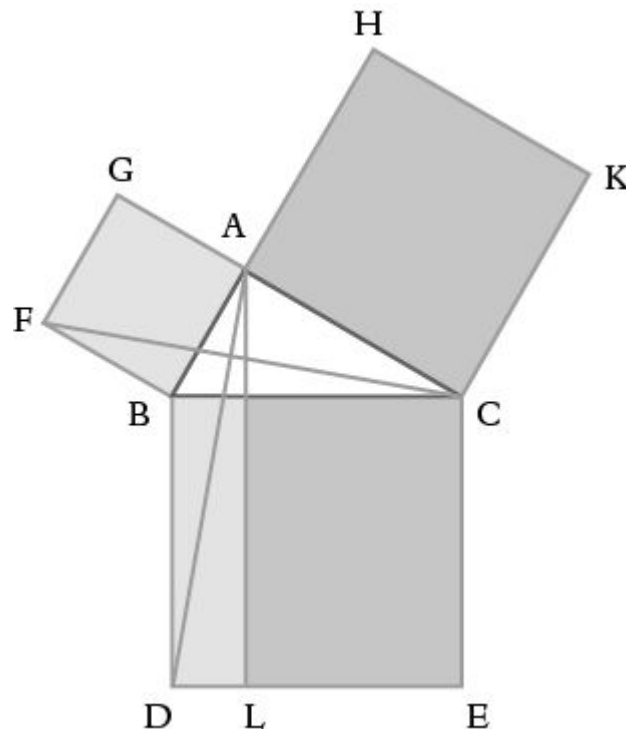


FIGURA 6.3. Estrutura de Euclides

Existem três lados de um triângulo e três quadrados na demonstração. Eles são BDEC, que é traçado sobre a linha BC; BFGA, sobre a linha AB; e ACKH, sobre a linha AC. Euclides

justifica a construção destes quadrados por meio de sua Proposição 46: “Com uma dada linha reta, descrever um quadrado.” Melhor porque melhor: sobre uma dada linha reta *existe* um quadrado.

Um único triângulo acomodou agora naqueles quadrados uma *entourage* de inflados guarda-costas. E agora?

A Proposição 47 é o primeiro teorema no qual um magistral Euclides impõe a seus leitores a distinção entre estratégia e tática. Sua tática envolve dois conjuntos de triângulos congruentes. Eles desempenham o papel de substitutos. Esses substitutos são congruentes e, por isso, iguais. Mas, como Euclides vai demonstrar, eles são também iguais a quadrados ou partes de quadrados. A estratégia dessa demonstração envolve assim um estratagema com objetos incidentais, seguido por um movimento das identidades essenciais do teorema, com o eixo do ataque curvando como uma foice.

PARA OBTER O PRIMEIRO de seus substitutos, Euclides baixa uma linha de A a L, uma paralela a BD ou CE. Depois une as linhas AD e FC. BAC e BAG formam ângulos retos. CA e AG constituem uma linha reta. O quarto axioma de Euclides está em jogo, e também sua definição 10 (que o leitor está convidado a resgatar de sua obscuridade).

Mas BA é também uma linha reta em relação a AH. E mais: os ângulos DBC e FBA são iguais porque são ângulos retos.

Agora, Euclides acrescenta o ângulo ABC a DBC e FBA. Segue-se que o ângulo DBA é igual ao ângulo FBC. A segunda noção comum de Euclides está em jogo, e finalmente prestando um trabalho útil.

Mas olhe: BD é igual a BC. São lados do mesmo quadrado. E FB é igual a BA, pela mesma razão. Os triângulos ABD e FBC são, assim, congruentes pela Proposição 4 de Euclides.

Euclides termina seu estratagema com os substitutos. A primeira metade da demonstração está completa.

EUCLIDES ESTABELECE AGORA uma conclusão sobre figuras que não são triângulos. O paralelogramo BDL, argumenta, é duas vezes o triângulo ABD. Eles têm a mesma base BD e estão nos paralelos BD e AL.

Ao justificar esta asserção – a única asserção recôndita em sua demonstração –, Euclides recorre ao seu teorema 41: “Se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo, e estiver nas mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo.”¹

Pelo mesmo raciocínio, o quadrado GB é duplo do triângulo FBC. Eles têm a mesma base em FB e estão nas mesmas linhas paralelas FB e GC. Dois iguais são iguais um ao outro. Segue-se que o paralelogramo BDL deve ser igual ao quadrado GB.

Euclides agora repete seu raciocínio. Se AE e BK estão unidos, afirma ele, dois novos triângulos congruentes aparecem em KBC e AEC. Segue-se que o paralelogramo CL deve ser igual ao quadrado HC.

É hora de se despedir de artifícios e vertigens. A demonstração chega ao seu desfecho com uma tática sólida e inquestionável de somar dois mais dois. O quadrado BDEC é igual às suas partes em BL e CL. Mas CL é igual ao quadrado HC; e BL é igual ao quadrado GB. Quando reunido, o quadrado BDEC, depois de ser dividido para propósitos de demonstração, é igual a GB e AK.

E assim o quadrado do lado BC é igual aos quadrados dos lados BA e AC.

Feito.

Viu isso, filho?

Sim, senhor.

Isso aí, garoto.

7. Prova visível e invisível

Reductio ad absurdum, que Euclides amava tanto, é uma das melhores armas de um matemático. É um gambito bem melhor do que qualquer jogada de xadrez: um jogador de xadrez pode oferecer o sacrifício de um peão ou mesmo de uma peça, mas um matemático oferece o jogo.

G.H. HARDY

Alguns quadros chegam diretamente ao sistema nervoso e outros quadros contam sua história numa longa diatribe percorrendo o cérebro.

FRANCIS BACON

NO MARAVILHOSO QUADRO *Júpiter e Antíope*, de Antoine Watteau, um Júpiter tenso e musculoso tira o manto de seda do corpo adormecido de Antíope e, claro, limitado por pigmentos duráveis, o pobre bruto não faz mais nada, para sempre trancado onde Watteau o deixou, perdido em desejos e enfurecido pela impaciência.

Esta é a grande limitação da tradição pictórica ocidental. O plano é estático. Nada se move. É uma limitação ansiosa por ser violada. Nos séculos XVIII e XIX, apareceram invenções nas quais uma série de recortes de papel esticado, quando rapidamente folheada, criava uma frágil ilusão de vida real. Os adultos ficaram encantados, as crianças maravilhadas. Havia o zootrópio, a lanterna mágica, o praxinoscópio, o taumatrópio, o fenacistiscópio e o livro de folhear. Visionários do praxinoscópio anteviam que uma série de recortes montados poderia um dia mostrar Júpiter com toda sua massa muscular fazendo algo mais do que se enfurecer de impaciência. Mas, sejam quais forem os desdobramentos revelados pelo cinema, depende de uma experiência prefigurada que uma imaginação sofisticada traz ao próprio plano pictórico. Uma grande pintura incita sua própria continuação analítica, que ocorre inteiramente na mente

do observador, assim como um arranjo sensual de duas formas bidimensionais consegue sair de seu confinamento e entrar no futuro ou no passado durante um momento de fantasia estética. Comentando sobre John Ruskin, o historiador de arte Kenneth Clark recorreu a uma vantagem que o permitia “conjurar imagens vívidas no olho da mente”. Qualquer que seja a vantagem de Ruskin, ela incorpora um poder que em parte todos compartilhamos, a habilidade de ver um quadro e escapar do presente para deslizar na corrente do tempo.

A continuação analítica de um grande quadro em geral controla suas propriedades estéticas e também seu vocabulário crítico natural. *Júpiter e Antíope* de Watteau está repleto de tensão – a palavra óbvia – e seu arranjo de formas é instável, no mínimo pelo desconforto que Júpiter está prestes a sentir no braço direito. A *Vista de Delft* de Johannes Vermeer é, ao contrário, sereno. Projetada no futuro ou recuperada do passado, a paisagem não muda, um rio passando por um canal aberto, as nuvens, os reflexos na superfície da água, a areia – não tanto atemporal, mas indiferente, um fluxo, e também uma maturidade.

Os elementos É FORA DO comum como um tratado matemático por ser meticulosamente ilustrado. Para cada teorema, há uma figura; e com raras exceções, as figuras são maravilhosas, com *Os elementos* proporcionando aos leitores uma série de engenhosos quadros geométricos: triângulos, círculos, quadrados, retângulos, linhas cruzadas ou em paralelo, as estáveis e familiares formas de arte e arquitetura, cada uma apresentada em isolamento, como auxiliar pedagógica ao texto; a obra de um professor magistral que sabia exatamente quando a convicção de seus alunos estava para afrouxar. Talvez seja possível ler as páginas de *Os elementos* sem prestar atenção em suas ilustrações, mas ninguém fez isso.

Como o *Júpiter e Antíope* de Watteau ou a *Vista de Delft* de Vermeer, não há nada em *Os elementos* que corresponda ao que na vida é uma sucessão fluida e em constante mudança – *aquelas*

imagens que ainda novas imagens geram.^b As ilustrações são essenciais porque elas são um início. “Quem poderia prescindir da figura do triângulo, [ou] do círculo com seu centro?”, perguntou David Hilbert em 1900. Os axiomas nada têm a ver com isso. “Normalmente não seguimos a cadeia de raciocínios até os axiomas”, observou Hilbert. “Pelo contrário, aplicamos, especialmente no primeiro ataque a um problema, uma combinação rápida, inconsciente, não totalmente segura, confiando num certo sentimento aritmético em relação ao comportamento dos símbolos aritméticos, dos quais podemos prescindir com um pouco de aritmética e com a imaginação geométrica em geometria.”

É no rico e fascinante intercâmbio entre a estrutura lógica de seus teoremas e suas brilhantes e planejadas ilustrações que a arte de Euclides se torna mais viva.

Sim, *viva*; sim, *arte*.

Alguém sabe se foi Euclides quem fez suas ilustrações? Não, não sabemos. O rastro do manuscrito só chega até o início da Idade Média, não mais que restos encontrados outrora, embaralhando antiguidades e manuseando-as distraidamente no Cairo ou em Bagdá, e depois passando-as para estojos de cedro. E esse é outro aspecto de *Os elementos*, o mistério do livro, o enigma da identidade de Euclides.

A PROPOSIÇÃO 27 DE EUCLIDES afirma que se uma linha reta EF traçada sobre duas linhas retas AB e CD formam os ângulos iguais AEF e EFD, então AB é paralela a CD (Figura 7.1).¹ É preciso esmiuçar um pouco o teorema. Uma linha reta EF é traçada sobre duas linhas retas AB e CD. Dito uma vez, não é necessário dizer novamente. As três linhas retas são como as três mulheres gordas de Antibes, de Somerset Maugham: elas estão lá. O teorema esmiuçado: se AEF é igual a EFD, então AB é paralela a CD.

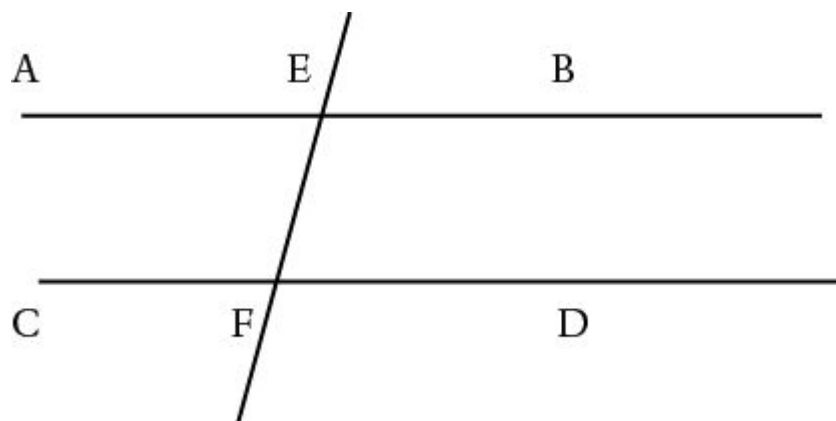


FIGURA 7.1. Proposição 27

A Figura 7.1 não diz nada além disso: ângulos são iguais; linhas são paralelas. É uma monotonia. Se a figura for compreendida como uma fatia temporal – mostrando uma figura congelada num momento –, seu prolongamento no futuro pode revelar algo mais de suas tensões internas, o equilíbrio de forças que leva ao próprio teorema? Agachado no óleo de Watteau, pode-se imaginar Júpiter arremetendo instantes depois; mas, se projetarmos a Figura 7.1 para um instante seguinte, não vamos ver nada que não tenhamos visto antes. A coisa é como era. Seus ângulos são iguais; suas linhas, paralelas.

Então, onde está aquela intuição visual “rápida, inconsciente, não totalmente segura”, quando precisamos dela? Desnecessário dizer, a Figura 7.1 *não* é o diagrama que Euclides usou.

A PROPOSIÇÃO 27 DE EUCLIDES diz que se AEF é igual a EFD, então AB é paralela a CD. O que já foi esmiuçado pode ser ainda mais esmiuçado: se *P*, então *Q*. Só quando vai fundo até o osso, Euclides é capaz de observar o espaço lógico em que seus argumentos e ilustrações se fundem completamente.

Proposições hipotéticas contêm duas proposições em *P* e *Q*; existe uma região quádrupla de espaço lógico correspondente em que elas podem coabitar. Se *P*, *então Q* está de frente para trás, e se *Q*, *então P* é de trás para a frente. Uma é o inverso da outra. Uma proposição e seu inverso não são verdadeiros juntos nem

falsos juntos. Podem seguir seus caminhos separados. Se $\sim P$, então $\sim Q$ também está de frente para trás (com $\sim P$ significando “não P ” e $\sim Q$ significando “não Q ”) e é chamada de o inverso de se P , então Q . O converso e o inverso de uma dada proposição são logicamente idênticos. Não há distância entre eles; ambos dizem a mesma coisa. E finalmente temos se $\sim Q$, então $\sim P$, o contraposto de se P , então Q , o acoplamento de conversão e inversão (uma descrição meio desesperada, pensando melhor). Uma proposição e seu contraposto são logicamente equivalentes.

Embora Euclides comece sua demonstração abordando diretamente a Proposição 27, seu argumento depende de seu contraposto: se AB não é paralela a CD , então AEF e EFD não são iguais.

Para demonstrar essa proposição, Euclides pratica uma manobra comum na matemática e, portanto, na geometria. Dividindo sua mente, ele atribui a uma metade a posição que ele deseja refutar e à outra metade o decorrente direito ao ridículo. A técnica é conhecida como *reductio ad absurdum*, ou prova por contradição. A estratégia de Euclides é provar que uma proposição é verdadeira assumindo que ela é falsa, em seguida demonstrando a confusão que isso causa.

A partir do pressuposto de que o contraposto à sua Proposição 27 é falso, Euclides vai mostrar que AEF e EFD são iguais e que não são iguais.

Essa é a confusão.

A DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES não é completa em si mesma. Se fosse, não haveria razão para colocar 26 provas antes dela. A Proposição 27 utiliza a Proposição 16 e as definições 19 e 23. A Proposição 16 diz que em qualquer triângulo, se um dos lados for estendido, os ângulos exteriores devem ser maiores que os ângulos interior e oposto. A Figura 7.2 ostenta um invejável ar de autoridade visual: o ângulo ACD é obviamente maior que os ângulos CBA ou BAC . A definição 23 tem algo a dizer sobre linhas paralelas – entre

outras coisas, se duas linhas não são paralelas, mais cedo ou mais tarde elas devem se encontrar em um ponto.² Sua definição 19 oferece a óbvia e esperada explicação de exatamente quais figuras são triângulos.

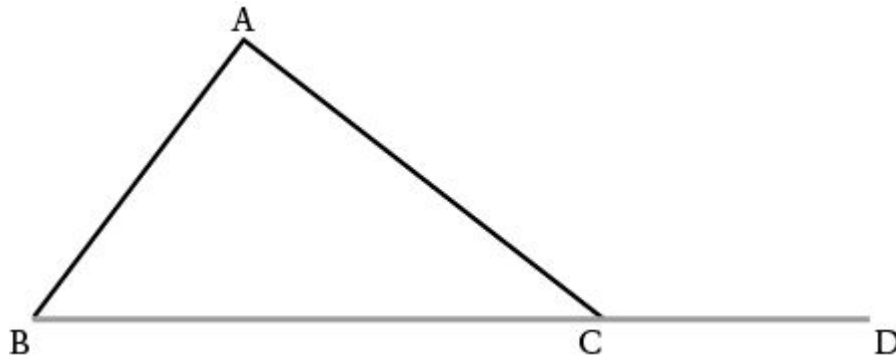


FIGURA 7.2. Proposição 16

Agora Euclides está pronto para argumentar. Ele afirma que se AB não for paralela a CD, os ângulos AEF e EFD mostrados na Figura 7.1 não serão iguais. Então vamos começar por aí. E vamos supor que a proposição seja falsa. Se for falsa, seus antecedentes devem ser verdadeiros: AB não é paralela a CD. E se for falsa, seu consequente deve ser falso: AEF e EFD são iguais.

Se AB não for paralela a CD, as duas linhas devem se encontrar num ponto G. É aqui, e somente aqui, que o diagrama de Euclides desempenha um papel. A Figura 7.3 faz uma coisa: ilustra a suposição de que AB *não* é paralela a CD, a antecedente – e *apenas* a antecedente – da proposição que Euclides pretende rejeitar. A figura é tão frugal e inesquecível quanto uma linha reta. Ela não mostra as linhas AB e CD convergindo na direção de G. Se tivesse sido indagado sobre essa questão, Euclides poderia ter dito com perfeita segurança: por que eu me importaria?

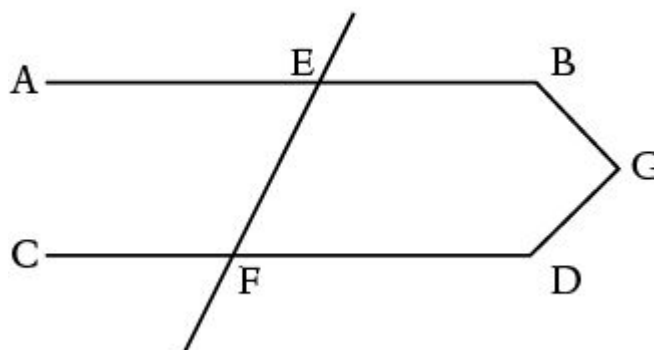


FIGURA 7.3. Proposição 16, diagrama de Euclides

Por que ele se *importaria*?

Já que AB e CD encontram-se em G, Euclides em seguida constrói o triângulo GEF. Para isso ele precisa de sua definição 19 e do primeiro axioma, este para conectar os pontos e aquele para dizer o que eles significam. A Proposição 16 de Euclides afirma que, em qualquer triângulo, se um dos lados for prolongado, os ângulos exteriores devem ser maiores que os ângulos interior e oposto. A negação da Proposição 27 de Euclides encontrou a prova antecedente de Euclides da Proposição 16. Chegamos ao ponto crucial da inflexão da demonstração.

Embora Euclides não forneça diagramas para ilustrar esse ponto, um diagrama é fácil de se obter (Figura 7.4). O equilíbrio da demonstração de Euclides é agora uma questão de afirmar o óbvio. A partir de sua Proposição 16, Euclides concluiu que AEF e EFD *não podem* ser iguais. Mas a partir de sua suposição de que sua Proposição 27 é falsa, Euclides concluiu também que AEF e EFD *precisam* ser iguais. O resultado é a confusão prevista: AEF e EFD são iguais e desiguais.

Podemos permitir que Euclides dissolva as distinções em sua mente de trás para a frente. O pressuposto de que a Proposição 27 é falsa levou a uma contradição. Portanto, a proposição deve ser verdadeira. Euclides convenceu a si mesmo de que estava certo.

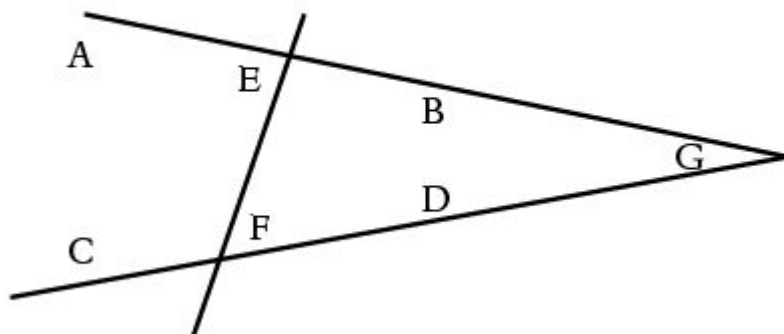


FIGURA 7.4. Contraposto à Proposição 27

Os *elementos* DE EUCLIDES PERMANECE trancado num mundo anterior ao nosso, o que requer o tipo de envolvimento imaginário e sofisticado também exigido por Watteau. O quadro de um diagrama euclidiano é tratado como uma fatia de uma série contínua, com a mente organizando em perspectivas apropriadas as fatias que já se foram e as que virão depois.

O propósito de uma demonstração é ganhar credibilidade, e, para ganhar a credibilidade de seu leitor, Euclides investiu em uma vida pictórica em sua Proposição 27. Seu diagrama e a estrutura lógica do teorema que ele expressa passam por uma fusão. Bem mais do que apenas um método axiomático, é esta fusão que está no cerne do método de Euclides.

Na Figura 7.1, linhas traçadas paralelas partem para o infinito, sempre juntas, à mesma distância também, mas sempre separadas, condenadas a viajar num isolamento assistido por meio do todo do espaço. A Figura 7.3, ao contrário, expressa o cerne contraposto do argumento de Euclides. Ela oferece uma visão lúcida e equilibrada do futuro, mas uma visão reduzida a um único ponto pictórico e geométrico. As linhas não são paralelas; portanto, elas se encontram num ponto.

Esse diagrama de Euclides movimenta-se para trás e para a frente por meio de uma sequência que Euclides espera que o leitor crie e complete em sua própria mente. As linhas paralelas podem se aproximar uma da outra, curvando-se num desafio aos fatos. Defletidas da posição paralela, as linhas retas começam a convergir na direção de certo ponto G. Encontrando-se desta maneira, elas registram um efeito nos ângulos exteriores e interiores da figura original. Registrado o efeito, os ângulos mudam, e com a mudança dos ângulos, “Bem, você sabe ou não sabe ou eu não lhe falei que toda história tem uma escola e isso é xis ou ípsilon da questão, Veja, o crepúsculo está crescendo. Meus galhos estão se enraizando”.³

As Figuras 7.1 e 7.3 mostram mundos em colisão contra os fatos. Linhas que são paralelas na Figura 7.1 *não* são paralelas na Figura 7.3. Mas mundos em colisão no nível da imagem representam mundos em colusão no nível do teorema. Euclides está convencido de que, tendo compreendido a demonstração, você vai compreender a ilustração, pois, com seu refinado poder de unificar a estrutura lógica de sua demonstração e os diagramas pelos quais a demonstração é comunicada, ele ilustrou um fluxo temporal.

Da parte de Euclides, o Mágico, nada mais precisa ser feito. Ele conseguiu que você fizesse algo rápido, inconsciente e não totalmente seguro.

Da parte de Euclides, o Lógico, nada mais precisa ser acrescentado. Ele conseguiu que você visse uma sequência de proposições em rota de colisão rumo a uma contradição.

Da parte de Euclides, o Geômetra, nada mais precisa ser feito ou acrescentado.

AS PROPOSIÇÕES QUE EUCLIDES demonstrou em *Os elementos* ascendem por número, e os números são um guia razoável para sua dificuldade. A Proposição 27 retém algo de óbvio. Encoraja o estudante (ou o leitor) a um resmungo de concordância e afirmação. Não obstante, o teorema é dramático em seu alcance e poder. Ele

traça uma conexão entre dois ângulos iguais por um lado e duas linhas paralelas por outro.

Um olhar é suficiente para aferir a característica de um ângulo, mas nenhum olhar, por mais prolongado, faz muito para determinar a característica de linhas paralelas. Linhas retas são paralelas se nunca se encontrarem. No plano euclidiano, esse *nunca* segue em frente. Como faz o geômetra para estabelecer que linhas que nunca se encontram nunca se encontrarão? Uma vez que tenham passado pelo último ponto de observação pública, linhas que parecem paralelas podem intencionalmente tomar uma decisão inesperada para se aproximarem, no fim das contas.

Mas ângulos iguais são iguais localmente, visíveis no aqui e agora. Ao examinar os ângulos feitos por certas linhas retas, o geômetra pode determinar seu paralelismo de uma vez por todas. Não há necessidade de rastreá-las até o infinito.

Trata-se de um teorema interessante, mas de forma alguma extraordinário. O extraordinário é o que está tão frequentemente oculto em *Os elementos*, o sofisticado conjunto de instrumentos que Euclides empregou para servir a seus fins. A demonstração da Proposição 27 é só uma questão de poucas linhas necessárias para se movimentar com a convicção lógica das premissas de Euclides às suas conclusões. Mas, assim como um exército, cada um dos teoremas de Euclides traz uma longa cauda logística: seu aparato de proposições, axiomas, definições, noções comuns e regras de inferência. E suas ilustrações, esses diagramas que proporcionam uma intuição “rápida, inconsciente e não totalmente segura”.

Nenhuma parte dessa imensa cauda logística por si mesma induz credibilidade ou elimina a reflexão. O gênio de Euclides foi compreender o todo e confiar no leitor para seguir sua compreensão.

^b Trecho do poema “Bizâncio”, de William Yeats. (N.T.)

8. A proposta do diabo

Álgebra é a proposta feita pelo diabo ao matemático. O diabo diz: “Eu vou lhe dar esta poderosa máquina, que vai responder a qualquer pergunta que você quiser. Tudo o que você precisa fazer é me dar sua alma: desista da geometria e você terá esta maravilhosa máquina.”

MICHAEL ATIYAH

SE EXISTEM NÚMEROS e existem formas na natureza, o que vem primeiro?

Senso comum: nenhuma das opções.

Primeiro em *quê*?

Embora *Os elementos* de Euclides seja um tratado sobre geometria, alguma noção dos números naturais 1, 2, 3 ... também está presente como pano de fundo. Não poderia ser de outra forma. Afinal, Euclides fala de triângulos, referindo-se a mais do que *um*, e só existe *uma* e apenas *uma* linha paralela para uma dada linha especificada pelo axioma de Playfair. Os números naturais estão entre as noções comuns “nas quais todos os homens baseiam suas provas”. O reverso também é verdadeiro. Nenhum matemático poderia estudar aritmética se os numerais não tivessem propriedades geométricas estáveis. Imagine tentar provar que 2 mais 2 é igual a 4 e ver o numeral 2 assumir uma sinuosa deformação no quadro-negro, ou na mente do matemático, talvez esvanecendo no próprio momento de triunfo intelectual.

O óleo da conciliação foi espalhado, a questão, é claro, permanece. O que vem primeiro, geometria ou aritmética – primeiro no sentido de ser mais fundamental, como pão é mais fundamental que a manteiga, e assim primeiro no sentido em que a geometria pode ser derivada da aritmética, ou a aritmética da geometria?

OS NÚMEROS NATURAIS: 1, 2, 3 Embora o número 1 seja menor que todos os demais, não existe um número maior do que qualquer um dos outros. Se houvesse esse número n , o número $n + 1$ seria maior. Segue-se que os números naturais são infinitos? O grande Gauss fez um alerta: “Eu protesto”, observa Gauss, “contra o uso de magnitude infinita como algo completo, que nunca é permissível na matemática. Infinito é meramente um modo de dizer.” A maneira apropriada de falar é falar com reservas. Os números naturais são *potencialmente* infinitos. O matemático ascende de 1 a 2, de 2 para 3 e de n para $n + 1$. Mas a menos que a contagem prossiga *eternamente*, esta análise dificilmente pode fazer justiça aos números naturais; e se ela puder seguir eternamente, por que não admitir o infinito de uma vez por todas e estar conciliado com isso? Georg Cantor, o criador da teoria dos conjuntos, argumentou, no final do século XIX, que o conjunto de números naturais compreende algo infinito de súbito, uma grande coisa, completa em sua exuberância. O que Cantor não conseguiu explicar é justamente como a mente humana tem acesso ao infinito senão subindo a escada dos números, um passo por vez. Os números naturais compreendem um conjunto infinito. Ponto para Cantor. O acesso ao infinito é incremental. Ponto para Gauss.

Não é o estilo de Euclides.

NOS LIVROS V, VII E X de *Os elementos*, Euclides fala sobre os números. “Uma unidade”, diz ele, “é aquilo por cuja virtude cada uma das coisas que existem é chamada de um.” Um número é uma “multidão composta de unidades”. Antigos comentaristas, escrevendo antes e depois de Euclides, sugeriram que uma unidade era a mínima ou a menor resposta à pergunta *Quantos?*. A resposta: apenas *um*. Eles estavam bem conscientes, é claro, que fosse o que fosse, *um* também poderia ser dividido, mas isso, argumentavam, apenas retornaria o matemático a quaisquer multiplicidades que o número 1 pudesse resolver em favor do menor dos números.

Embora o Livro VII de *Os elementos* mencione explicitamente os números, o livro é logicamente subordinado ao Livro V. Os números do Livro VII são, de fato, as magnitudes do Livro V. O Livro X de *Os elementos* é, numa dupla deferência, subordinado a ambos. Um raro lapso em organização está presente por toda parte. O Livro V introduz a teoria das magnitudes de Euclides. Ela é amplamente considerada uma das obras-primas de Euclides, seja questionável se é de Euclides e se é uma obra-prima. Historiadores da matemática grega sugerem atualmente que a teoria de Euclides deve muito ao matemático grego Eudoxo de Cnidos. Tendo antecipado o cálculo infinitesimal com seu método de exaustão, Eudoxo também parece ter antecipado os números reais com sua teoria das proporções. Em seu tratado *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, o matemático Edwin Moise argumentou que, em relação aos números reais, os matemáticos modernos não precisavam criar o que Eudoxo já conhecia.

Com uma unidade fixa – uma unidade *escolhida* –, Euclides ganha acesso a um simulacro dos números naturais e aos números racionais ou frações, tais como $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$. O número 7 corresponde a 7 unidades enfileiradas, e o número $\frac{1}{7}$, à proporção de 1 unidade para 7 delas.

Na progressão de *Os elementos*, uma magnitude representa uma ideia nova, mas a familiaridade fácil com que lida com ela sugere que Euclides considera magnitudes como aspectos naturais de seu sistema – amigos da família. Euclides nunca diz exatamente o que é uma magnitude, mas a ideia geral é de extensão, uma ocupação de espaço, uma expansão. Qualquer que seja a expansão abrangida por uma unidade, ela corresponde no plano a uma linha reta fixa entre dois pontos. É assim que Euclides ilustra cada uma de suas ideias aritméticas. Segue-se que os números naturais, na medida em que são sem fim, devem corresponder ao alongamento infinito de uma linha reta.

“Parece que o velho Platão”, observou René Thom (com certa indiferença às regras gramaticais), “considerava esse tipo de

geração como o tipo [de] geração discreta [característica] da sequência de números inteiros.” O já muito velho Platão pode ter murmurado uma palavra no ouvido de um muito jovem Euclides; se não, suas palavras estavam ainda dentro do limite de audição.

Existe um notável símile em ação em *Os elementos* – que está hoje anacrônico. Euclides descobriu a fonte da geração aritmética num objeto geométrico. As sombras jogam no plano euclidiano. Fora do plano, há o jogo das coisas reais no mundo real. Daí o sorriso. A linha euclidiana move-se no espaço euclidiano como um objeto físico move-se no espaço físico. Essa ideia ocorreu a muitos matemáticos gregos. Ela é a base do esquema da álgebra geométrica dos gregos. Conforme percorre seu caminho no sistema de Euclides, ela introduz um grau de artifício nos pensamentos de Euclides. A linha euclidiana flui através dos pontos que toca, mas só pode ser dividida em segmentos discretos por meio de um artifício retrospectivo do geômetra. Desde o início, a ideia euclidiana de número conflita com o símile que a explica. No fim, o que pode ser nada mais que um conflito conceitual cresceu até ameaçar a integridade do próprio sistema euclidiano.

NÃO É DESRESPEITOSO – É? – dizer que a álgebra geométrica tem nas mãos de Euclides toda a elegância de ursos acorrentados aprendendo a dançar. Em sua demonstração do teorema de Pitágoras, Euclides ignora a equação algébrica pela qual os fatos são tão facilmente expressos – $a^2 + b^2 = h^2$ – e se ocupa com a construção daqueles quadrados um tanto aparvalhados, esmiuçando em suas áreas o segredo do significado do teorema. É um negócio canhestro. A Proposição 1 do Livro II de *Os elementos* afirma que a área de um dado retângulo é igual à soma de seus sub-retângulos. Em termos algébricos, é a lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, onde a , b , c e d são números. Os retângulos são ilustrações; eles se interpõem no caminho. Euclides leva a álgebra geométrica tão longe quanto consegue, mas quando chega aonde está indo, a maré já deve ter começado a virar. E embora leve um longo tempo para vazar – afinal a maré acabou vazando –, até os

matemáticos reconhecerem universalmente os imperativos da geometria analítica, a contracorrente.

Escrevendo no século XVII, René Descartes criou a geometria analítica numa obra intitulada *La Géométrie*. Descartes não estava inteiramente seguro do que estava fazendo. Deixou sua grande obra quase como uma reflexão tardia. Em geometria analítica, o plano euclidiano se faz acessível, e assim é aberto por um sistema de coordenadas. Um ponto é escolhido arbitrariamente, a origem. Como todos os pontos são, afinal, o mesmo, não importa *qual* ponto é escolhido. Seja qual for o ponto, ele corresponde ao número zero. Subsequentemente, o ponto é cortado por duas linhas retas e perpendiculares, os eixos das coordenadas do sistema. Os números positivos naturais correm da origem para o infinito, os números negativos correm no outro sentido, sempre moleques de rua, e exatamente o mesmo esquema é repetido para o eixo vertical, formando quatro segmentos de linha começando no zero e procedendo inexoravelmente até a borda do quadro-negro e do espaço além.

Qualquer ponto no plano pode agora ser identificado por um par de números (Figura 8.1) Antes oculto na uniformidade do espaço, um ponto adquire uma vívida identidade aritmética. É o ponto que corresponde a dois números, onde antes havia um embaciado espaço anônimo. Assim que os pontos adquiriram sua identidade numérica, os matemáticos passaram a dispor da magnífica maquinaria da análise algébrica para dotar a geometria euclidiana de uma segunda forma de vida, incomparavelmente mais vívida.

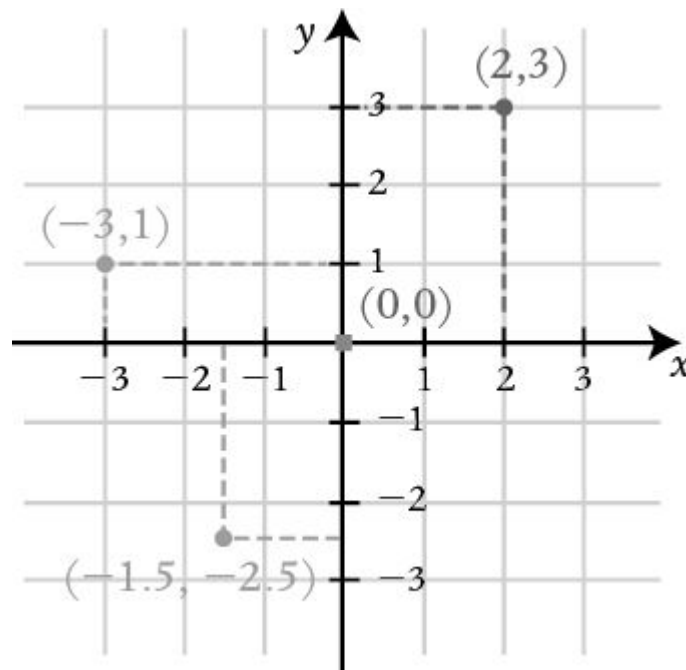


FIGURA 8.1. Sistema euclidiano de coordenadas

A ARITMÉTICA É O LUGAR onde os números são encontrados, e a álgebra é o lugar onde eles são tratados em seus aspectos mais gerais. Os pontos e as linhas retas da geometria euclidiana são indefinidos – pode-se fazer deles o que quiser. Agora que um ponto geométrico foi identificado com um par de números, uma linha reta pode ser definida pela equação $Ax + By + C = 0$, onde A , B e C são parâmetros numéricos, marcadores de lugar fixos, e x e y são variáveis denotando pontos que residem na linha.

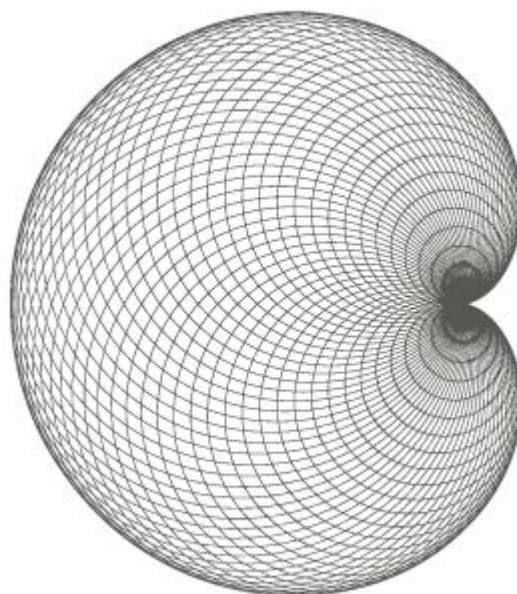


FIGURA 8.2. A cardioide

Será que Euclides tinha círculos para burilar? Tinha. Um círculo cujo centro está no ponto (a, b) e cujo raio é R , é perfeita e completamente descrito pela fórmula $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. A identidade do círculo foi dominada por um regime numérico: seu centro é um par de números; seu raio, outro número; e sua circunferência, uma interminável sucessão de números.

A geometria analítica tem o poder de ilustrar muitas formas geométricas familiares, tais como a parábola, a elipse e a *cardioide*, aquele coração desenhado a lápis que aparece nas cartas de amor: $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ (Figura 8.2).

Há curvas que se parecem com o sorriso de uma mulher, ou com um vale entre colinas, ou com as exuberantes pétalas de alguma flor tropical.

Há abundância.

NUM PEQUENO LIVRO intitulado *The Coordinate Method*, uma trinca de matemáticos russos (I.M. Gelfand, E.G. Glagoleva e A.A. Kirilov) oferece a seguinte descrição da geometria analítica: “Introduzindo

coordenadas, estabelecemos uma correspondência entre números e pontos de uma linha reta.” Em seguida acrescentam: “Ao fazer isto, exploramos o seguinte *fato* notável: só existe um número correspondendo a cada ponto da linha e um único ponto da linha correspondendo a cada número” (ênfase do autor). O fato notável ao qual recorrem é normalmente definido como o axioma de Cantor-Dedekind, embora eles não expliquem como um fato possa ser um axioma.

Mas não faz muita diferença. Não existe tal fato, e tampouco existe tal axioma. Existem alguns números que nenhuma magnitude acessível pode expressar. No Livro X de *Os elementos*, Euclides oferece uma demonstração baseada numa demonstração anterior atribuída à escola pitagórica. Ele só erra em não perceber que o que fez constitui um ato de imolação.

A hipotenusa de um triângulo retângulo cujos dois lados são iguais a 1 é igual, pelo teorema de Pitágoras, à raiz quadrada de 2. A raiz quadrada de 2 não é nem um número natural nem uma razão de um número natural. Uma demonstração mais simples que a do próprio Euclides procede por contradição. Suponha que a raiz quadrada de 2 *pudesse* ser representada como a razão entre dois números inteiros de modo que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Elevando ao quadrado os dois lados dessa pequena equação: $2 = \frac{a^2}{b^2}$. Ou $a^2 = 2b^2$.

O teorema fundamental da aritmética afirma que qualquer número inteiro positivo pode ser representado como um produto específico de números primos positivos. Um número primo é um número divisível apenas por si mesmo e pelo número 1. Conhecido pelos gregos, esse teorema era conhecido por Euclides. Era amplamente conhecido; tinha sido bem divulgado.

A pequena equação $a^2 = 2b^2$ está prestes a passar por um acidente feio. Qualquer que seja o número de fatores primos em a , deve haver um número *par* deles em a^2 . O dobro. Idem para b^2 . Mas o número $2b^2$ tem um número *ímpar* de fatores primos. Afinal, o número 2 é primo. Ou a raiz quadrada de 2 não é um número, ou

alguns números não podem ser expressos como números naturais ou como a razão de números naturais.

É um acidente feio.

As consequências são óbvias. Se a linha euclidiana não contém um ponto correspondente à raiz quadrada de 2, como pode o axioma de Cantor-Dedekind ser verdadeiro? E, se o for, como pode a linha ser euclidiana?

OS NÚMEROS NATURAIS 1, 2, 3 ... constituem o menor conjunto de números cuja existência não pode ser negada por ninguém que não seja considerado insano. Seja qual for sua natureza, matemáticos do século XIX descobriram como números além deles podiam ser definidos e se tornarem úteis. Um único instrumento analítico está em ação. Números novos emergem conforme são necessários para resolver equações que não podem ser resolvidas com o uso de números mais antigos. Zero é o número que resulta quando qualquer número positivo é subtraído de si mesmo, e por isso aparece como a solução de equações da forma $x - x = z$. Os números negativos fornecem soluções para equações da forma $x - y = z$, onde y é maior do que x . As frações comuns, com o numerador em cima e o denominador embaixo, são soluções em estilo para qualquer equação da forma $x \div y = z$.

Permaneceram equações como $x^2 = 2$. A equação está aí em plena vista. O que é, então, x ? A resposta provou-se difícil de obter. Os gregos empenharam-se em encontrar um sentido adequado para a raiz quadrada de 2, mas não foram muito bem-sucedidos. Além do imperativo de resolver essa equação, os matemáticos não tinham uma moeda comum com a qual pudessem facilmente pagar por sua solução. Não havia nada em sua experiência.

No final do século XIX, Richard Dedekind definiu os números irracionais – um termo estranhamente adequado: como números que não são racionais vêm a ser *irracionais*? – em termos de *cortes*, de uma divisão dos números inteiros em duas classes, A e B. Qualquer número em A, afirmava Dedekind, é menor que qualquer

número em B; e mais, não existe um número maior em A. Dedekind contava os próprios cortes como novos números, com a enigmática raiz quadrada de 2 correspondendo aos cortes A e B nos quais todos os números menores que a raiz quadrada de 2 estão em A, e todos os números maiores que a raiz quadrada de 2 estão em B. Os cortes de Dedekind não são uma espécie de animal que se pode encontrar num zoológico comum. Dedekind demonstrou que eles eram o que não pareciam ser – meio que números na natureza. Eles podiam ser somados e multiplicados; com a prática, podiam ser manejados com facilidade e perícia. Eram ótimos. E eram, em todo caso, mais atraentes do que a suposição de que não havia número algum no local onde deveria haver um número correspondente à raiz quadrada de 2.

A introdução formal dos números reais no século XIX deu destaque a uma saga aritmética, uma saga em que números que outrora inspiravam inquietação adquiriram sua própria – e soberana – identidade. Os números inteiros positivos, o zero, os números inteiros negativos, as frações e os números reais estavam todos no lugar. Já haviam adquirido uma existência indubitável nas mentes dos matemáticos. O sistema tinha uma espécie de integridade abstrata. Mantinha-se íntegro sob escrutínio. Não era adventício.

O SISTEMA DOS NÚMEROS REAIS representava a confluência de dois triunfos: o triunfo da aritmética e o triunfo da álgebra. O triunfo da aritmética é óbvio. O sistema dos números reais é um sistema de *números* reais. O triunfo da álgebra, um tanto menos. Os números reais são mais do que meros números. Os números reais satisfazem os axiomas de uma estrutura algébrica identificável, que os matemáticos chamam de *corpo*. A grande realização da matemática do século XIX e do início do XX foi ter comprimido conceitos para destacar a estrutura de seus exemplos. Escrevendo em 1910, o matemático alemão Ernst Steinitz propôs fazer uso de corpos em um “*abstrakten und allgemeinen Weise*” – num sentido abstrato e geral. Um corpo, ele escreveu, é um sistema de elementos com duas operações: soma e multiplicação. Steinitz introduz então uma

nota realmente nova, inteiramente moderna, a nota que assinala uma promoção decisiva de uma ideia interessante a uma ideia independente. Não importa a questão, corpo *do quê*? Para Steinitz, o conceito abstrato de corpo está ele mesmo no *mittelpunkt* de seus interesses. Os exemplos minguem e desaparecem. O campo permanece, tornando-se ele mesmo.¹

OS AXIOMAS DE UM CORPO unem suas diversas e vastas propriedades.² A definição de requisitos lembra um pouco os advogados de *A casa abandonada*, de Dickens, levantando-se para apresentar suas moções.

- Um corpo é um conjunto de elementos, milorde...
- Elementos, milorde, de fato qualquer coisa.
- Sinto que é meu dever, milorde, acrescentar que esses elementos compreendem duas operações...
- Perdão? Quaisquer duas operações distintas, milorde.
- Sinto que é meu dever, milorde, acrescentar que existe 0 em algum lugar. Sim, aqui está.
- Mesmo? Não faz nada, milorde: $a + 0$ é sempre a .
- Há um 1 também, milorde. Sim, eu o tenho aqui. Perdão? Nada. Não faz nada, milorde: $1a$ é sempre a .
- Sinto que é meu dever, milorde, acrescentar uma palavra sobre inversos. Eu os tenho aqui.
- Perdão? Mesmo? Eles invertem, milorde. Qualquer elemento mais seu inverso é 0, e qualquer elemento multiplicado por seu inverso é 1.

Para além da exigência do juiz que os advogados se sentem, não há a menor necessidade de continuarmos com esse drama de tribunal. Um corpo é um objeto acima de tudo abstrato. É ainda um objeto abstrato cujo exemplo mais convincente são os números reais comuns. Uma lei associativa mantém sua força: $a + (b + c) = (a + b) + c$. Assim como uma lei distributiva: $a(b + c) = ab + ac$. Identidades em 0 e 1, e inversas nos números negativos e frações, possibilitam a recuperação de subtração e divisão. É, como dizem os advogados, o esperado. Um último advogado se levanta para lembrar ao juiz que os números reais são ordenados. É sempre um

número antes do outro, ou depois do outro; é sempre, como o juiz murmura, uma coisa ou outra.

Deixando de lado os advogados, essa ideia foi um triunfo, o segundo, depois da definição dos próprios números reais – um triunfo paralelo, já que o sistema dos números reais é em si mesmo um corpo ordenado. Isso induz a uma pergunta óbvia apreensiva: um triunfo sobre o quê?

Em 1899, David Hilbert publicou um livro fininho intitulado *Grundlagen der Geometrie* (Os fundamentos da geometria). Tendo por muitos anos se perdido em abstrações, um grande matemático escolhera revisar suas raízes. No decorrer dos trinta anos seguintes, Hilbert revisaria seu livro, mudando ligeiramente sua ênfase, muito empenhado, nunca perfeitamente satisfeito. O *Grundlagen* – a palavra germânica tem uma qualidade terrena que falta em outros idiomas: *die Grundlagen*, *der Grund*, ou a razão, a base – é um livro móvel, ao mesmo tempo um gesto de respeito histórico e uma realização em autoconsciência. Ao escrever sobre a geometria euclidiana, Hilbert foi sensível às ansiedades correntes no pensamento do século XIX. Bem ocultas sob o desenvolvimento exuberante de várias geometrias não euclidianas, as ansiedades podiam parecer arcanas. Mas o que os matemáticos haviam suprimido era uma preocupação, às vezes elevando-se a uma dúvida de que, em geometria, o aspecto monumental do sistema de Euclides pudesse ter disfarçado por tanto tempo o fato de que nada dele fazia sentido.

Será que os axiomas da geometria euclidiana eram consistentes? Ou estavam enterrados na enchente obscura de suas conseqüentes proposições que, junto com suas negações, podiam *ambas* ser demonstradas? Imaginar que a geometria euclidiana pudesse ser *inconsistente* não seria pôr em dúvida um sistema axiomático, mas todo o modo de vida que ele engendrara. O *Grundlagen* de Hilbert não respondia completamente a esta questão, pois era uma pergunta que não podia ser completamente respondida. Hilbert

demonstrou que a geometria é consistente se a aritmética for consistente, uma realização meio parecida a demonstrar que um prédio será alto se um outro for mais alto, mas, assim mesmo, uma realização.

Hilbert se dedicou a uma reforma da geometria euclidiana por meio da expansão da lista original dos cinco axiomas de Euclides, transformando-os em vinte. Num comentário meio atrevido, Thom define o sistema de Hilbert como uma obra de “tediosa complexidade”. Os detalhes são onerosos. Hilbert havia descoberto e corrigido vários lapsos lógicos em Euclides; ele era fastidioso. Hilbert aceita, como fez Euclides, pontos, linhas e planos como fundamentais, e os traz à existência explicitamente e por suposição. Ele já havia delineado seu método num ensaio intitulado “Über den Zahlbegriff” (Sobre o conceito de número): “Começamos por pressupor a existência de todos os elementos (no início são três diferentes sistemas de coisas: pontos, linhas e planos) e colocamos esses elementos em certas relações umas com as outras por meio de certos axiomas, em particular dos axiomas de conexão, ordem, congruência e continuidade.”

Tendo estabelecido vinte axiomas, Hilbert então recua para lançar um olhar frio e avaliador sobre o que fez. Há uma mudança de ênfase, um senso intensificado de clareza. A análise de Euclides é dirigida para o mundo das formas, mas Hilbert começou a pensar sobre a própria análise, com o paciente, como tanto costuma ocorrer, deitado preguiçosamente no divã de couro.

A sutil distinção necessária para chamar atenção a essas questões imediatas não existia no início do século XX. Foi preciso tempo para que os lógicos as desenvolvessem. Hilbert foi cuidadoso; não cometeu equívocos em seu tratado, mas ele não estava atualizado.

Uma *teoria*, dizem agora os lógicos, consiste em um conjunto de axiomas e suas consequências lógicas. A geometria euclidiana é uma teoria, a primeira na história humana. Um *modelo* de uma teoria consiste em estruturas nas quais teorias são satisfeitas – seu

mundo. A geometria euclidiana se satisfaz no plano euclidiano. O plano euclidiano é, por isso, um modelo para a geometria euclidiana. Essas ideias simples de teorias e seus modelos tornam possível perguntar quais modelos fazem teorias verdadeiras e se uma teoria pode ser expressa dentro do alambique de uma outra. Foi essa ideia de reafirmação ou reinterpretação que Hilbert avançou em seu tratado, o instrumento que desenvolveu.

O *Grundlagen* DE HILBERT é uma obra com propósitos divididos. Entre outras coisas, trata-se de uma defesa da geometria analítica clássica.

Ao pensar sobre os números, Hilbert considerou dois axiomas, o chamado axioma de Arquimedes e o chamado axioma da completude. O primeiro axioma pode ser encontrado em Eudoxo; é um aspecto implícito de sua teoria das proporções. O axioma tem um significado intuitivo simples e poderoso.³ Quando se trata de certos números, não há número maior nem número menor. O axioma é satisfeito pelos números racionais. O axioma foi longe no mundo antigo, mas não longe o bastante. Não era suficiente para caracterizar os números reais, e para isso era necessário o axioma de completude.

“Para um sistema de pontos, linhas retas e planos”, escreveu Hilbert, “é impossível acrescentar outros elementos de maneira que o sistema assim generalizado forme uma nova geometria obedecendo a todos os cinco grupos de axiomas.” Tal é o axioma de completude. Há tantos pontos sobre a linha como há números reais. Há o suficiente para satisfazer a demanda. Este não é o axioma de Cantor-Dedekind, que fala de uma *correspondência* entre pontos e números. O axioma de Hilbert é da variedade de aplicação. Estabelece a existência desses pontos. Torna-os reais. Garante-os. Essa garantia torna possível, ainda que não plausível, as técnicas de geometria analítica.

Mas o axioma de completude de Hilbert não é um axioma da geometria. Os objetos que o axioma introduz para completar os

pontos sobre a linha euclidiana não são euclidianos: eles não são geométricos. Pertencem à aritmética e já vêm de longe.

DEPOIS DE FAZER uma defesa agressiva da geometria analítica – aqui estão eles, os números reais, é pegar ou largar –, Hilbert ao mesmo tempo revisou seu tom e seu tomo a fim de argumentar pacificamente em favor de uma versão de geometria euclidiana que não requer concurso *direto* qualquer que seja o lado aritmético das coisas.

Nos Livros V, VII e X de *Os elementos*, Euclides tenta ver nas luzes e nas sombras de um mundo puramente geométrico as figuras estáveis da aritmética. Ele procura com empenho, mas não consegue jamais distinguir bem o que distingue. Luz demais e, claro, sombras demais. Em *Grundlagen*, Hilbert justificou Euclides e o tornou abrangente, *son frère du silence éternel*.

O dispositivo empregado por Hilbert foi denominado pelo autor como cálculo de segmentos. Segmentos são segmentos de linha, como Euclides havia suposto. Não há forma de geração aritmética em ação. Tudo trabalha de dentro para fora. Com a paciência para os detalhes que fez Thom reclamar de sua tediosa complexidade, Hilbert dotou os segmentos de linha de Euclides de poderes aritméticos próprios. Eles podiam ser acrescentados um ao outro, subtraídos um do outro, multiplicados e divididos, dispostos em arranjos contínuos proporcionais e servir como substitutos para certas raízes quadradas.

Assim, o velho, persistente e incompleto esquema aritmético euclidiano poderia ser realizado – *sim*. Ele poderia ser realizado, como Hilbert entendeu perfeitamente, mas não realizado completamente. Segmentos de linha não são números. Podem ser usados para ilustrar números ou para formar uma imagem pela qual os números são compreendidos, mas não são *números*.

O VERBO FRANCÊS *engloutir* significa engolir algo sem mastigar – engolir inteiro, uma aniquilação. Depois de o primeiro Hilbert ter desistido de brigar em favor de bons trabalhos, um outro Hilbert está preparado para desistir dos bons trabalhos em favor da revolução. Este Hilbert está preparado para mostrar que a geometria euclidiana pode ser engolida pelo campo dos números reais. Em sua obra completa, Hilbert, o Vermelho mostra que os pontos, linhas e planos da geometria euclidiana são atores num mundo algébrico não de sua lavra e indiferente à sua natureza, com suas impressões em contrário apenas como uma questão de falsa consciência.

A TEORIA GEOMÉTRICA APRESENTADA por Hilbert no *Grundlagen* tem muito da teoria de Euclides. Os axiomas de Hilbert são expressos com mais precisão. Há muito mais axiomas dos que os encontrados em Euclides. O espírito é o mesmo. Euclides pretendia, é claro, que sua teoria fosse interpretada no plano euclidiano, com os axiomas geométricos contemplados num modelo puramente geométrico. *Isto* não pode ser porque *aquilo* não servia à agenda radical de Hilbert. Para seu próprio modelo, Hilbert escolheu um objeto aritmético, composto por um conjunto de números Ω . Esses números começam com 1 e incluem todos os números que podem ser elaborados a partir de 1 pelas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, e os números $\sqrt[3]{1 + \Omega^2}$. Esta estrutura gera os números reais, mas não gera *todos* eles. Ela é limitada. Se ela gera os números reais, também satisfaz os axiomas para um campo. Hilbert fez sua escolha de Ω por uma questão de conveniência; poucas páginas adiante, ele reconhece que, tendo introduzido alguns números reais, mas não todos eles, ele poderia muito bem ter introduzido todos os números reais e não apenas alguns deles.

O que se segue é uma deglutição em etapas. “Vamos observar”, escreve Hilbert, “um par de números (x, y) ... definindo um ponto.” O que é indefinido em geometria encontrou com o que é perfeitamente definido em aritmética. Na fricção resultante, qualquer senso de uma correlação entre pontos e números é perdido. Há uma *identidade*: um ponto é um par de números. O plano euclidiano abre passagem.

Tudo é escuro. A atenção dos matemáticos mudou de uma teoria em geometria para uma teoria em aritmética.

Linhas retas euclidianas seguem pontos euclidianos para o vazio, só para surgir novamente, renascidas na aritmética. Uma linha reta, escreve Hilbert, é uma razão de três *números* ($a : b : c$). Uma insistente identidade aritmética se impõe agora sobre a antiquada e cada vez mais afastada forma euclidiana. Existe uma *identidade*: uma linha reta é a razão de três números. A escolha de três números sugere, é claro, a equação da linha reta, com os símbolos $Ax + By + C = 0$ trazendo tudo sob o controle de uma única forma simbólica. Os números são expressos como uma razão porque duas equações $a_0x + b_0y + c_0 = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ definem – elas são – uma e a mesma linha reta se os números a , b e c forem proporcionais. Dessa forma, Hilbert ofereceu uma interpretação dos termos indefinidos da geometria euclidiana em termos dos elementos definidos de um campo ordenado real. E obteve uma teoria para falar na voz de outra teoria.

É como ouvir um gato latir.

O PONTO EUCLIDIANO SE esvaneceu em favor de pares de números; a linha reta euclidiana em favor de trincas de números – suas razões. Hilbert está agora livre para providenciar uma interpretação dos axiomas de Euclides em aritmética. O primeiro axioma geométrico de Hilbert é quase idêntico ao de Euclides: dois pontos distintos, A e B , sempre determinam completamente uma linha reta a . Este axioma é assumido pela geometria, mas não pela aritmética. Isso é demonstrado. Hilbert já ganhou o poder de dizer o que significa um ponto estar numa linha reta sem nunca mencionar pontos ou linhas retas. “A equação $ax + by + c = 0$ ”, ele escreve, “expressa a condição de que o ponto (x, y) está na linha reta $(a : b : c)$.”

O primeiro axioma de Euclides fala de dois pontos, A e B , e uma linha reta a . O ponto A é igual a um par de números (x_1, y_1) . Idem o

ponto B. Também é igual a um par de números (x_2, y_2) . A linha reta a é igual a uma razão de números (a, b, c) .

O primeiro axioma de Euclides será verdadeiro em seu modelo aritmético, Ω , se houver alguma equação que satisfaça A e B. E certamente há. O ponto (x_1, y_1) está na linha reta $ax_1 + by_1 + c = 0$. O ponto (x_2, y_2) está numa linha reta $ax_2 + by_2 + c = 0$. Subtraindo-se a segunda equação da primeira, o resultado é $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. O parâmetro c desapareceu; a e b podem agora ser eliminados na equação $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$. Dois pontos: uma linha reta.

O que tinha tomado a frente voltou. O círculo está fechado. Passo a passo, Hilbert pacientemente mostra como cada um dos axiomas da geometria euclidiana pode ser interpretado dentro de um modelo puramente aritmético. Mas Hilbert, é claro, faz mais. O fato de que cada dois pontos determinam uma linha reta não é verdadeiro apenas no campo ordenado real, é demonstrável. Axiomas geométricos se tornaram teoremas aritméticos. Com essa manobra, a geometria euclidiana foi engolida pela aritmética, a ingestão dando origem ao que hoje é chamado de espaço vetorial euclidiano, novas estruturas, ubíquas em toda a matemática, suas linhas compactas e lisas apagando todas as evidências pelas quais foram criadas.

Não há nenhuma coordenação, nenhuma contraparte, nenhum mapeamento, nenhum esquema de coordenação entre pontos e pares de números. Isto porque, sob a análise de Hilbert, *não* existem pontos euclidianos de antigamente.

“A geometria analítica nunca existiu”, observou prazerosamente o matemático francês Jean Dieudonné num comentário agora famoso. “O que há são apenas pessoas que fazem geometria linear malfeita, usando coordenadas, e chamam isso de geometria analítica. Fora com elas!”

E acrescentou: “Abaixo Euclides”, só para garantir.

9. A Sociedade Anônima Euclidiana

Uma tradição só é mantida viva por algo acrescentado a ela.

HENRY JAMES

No INÍCIO DO SÉCULO XIX, a Sociedade Anônima Euclidiana era inteiramente possuída por Euclides e seu *Os elementos*. Havia entre os matemáticos uma inquietude residual sobre os postulados das paralelas de Euclides, que pouco contribuiu para diminuir a sensação de que a geometria euclidiana tivesse, no curso de 2.300 anos, sido valorizada em sua estima real. Os filósofos concordavam. A geometria euclidiana, argumentou Immanuel Kant em *A crítica da razão pura*, não apenas era verdadeira – *é claro que era* –, mas necessariamente verdadeira, um aspecto da mente humana, a expressão do modo com o qual a mente confrontava o mundo sensível das formas.

Em sessenta anos, a antiga e famosa empresa havia passado por uma diluição de propriedade. Kant dobrou seu investimento no exato momento em que seu investimento havia sido reduzido à metade em valor. E não apenas Kant. Todos os filósofos haviam perdido alguma coisa; faltou ousadia da parte deles.

No final do século XIX, ficou claro que havia esquemas geométricos nos quais os postulados das paralelas de Euclides podiam ser substituídos por sua negação. As confusões longamente esperadas não apareceram. Quando Albert Einstein publicou as equações de campo para sua teoria da relatividade geral, em 1915, geometrias não euclidianas ganharam prestígio na física. Matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Nicolai Lobachevsky, János Bolyai e Bernhard Riemann – os homens que haviam *criado* a geometria não euclidiana – exigiram posições substanciais de propriedade na companhia euclidiana e as receberam.

O QUINTO AXIOMA de Euclides é uma das poucas afirmações em matemática a ter alcançado um tipo de notoriedade estável. É de reputação duvidosa; isso todo mundo compreende. E controverso. Isso também é compreendido. Julgando a partir da literatura popular, ninguém sabe muito bem por quê.

O postulado das paralelas de Euclides encontra-se hoje envolvido pelo manto de sua história exuberante. Euclides não fez uso de seu postulado até chegar à sua Proposição 29. Parece até que estava meditando, desconfiado. Deixando coisas de fora. O senso comum poderia sugerir que Euclides não usou o postulado das paralelas antes porque não precisou dele. Trata-se de uma visão prosaica e, por esse motivo, não muito considerada.

Antigos comentadores se perguntavam se o postulado das paralelas poderia ser deduzido dos outros quatro axiomas de Euclides. Eles percebiam seu caráter anômalo, que os deixava inquietos. Não conseguiam dizer exatamente por quê, e às vezes eram traídos por seus escrúpulos. Proclo rejeitou uma demonstração falaciosa de Ptolomeu do postulado das paralelas, ao mesmo tempo em que apresentou ele mesmo uma demonstração falaciosa. Os matemáticos antigos costumavam pressupor o que pretendiam mostrar, uma circunstância que aumentava suas frustrações sem resolver suas ansiedades.

Matemáticos desinteressados em provar o postulado das paralelas estavam mais interessados em demonstrar que ele era equivalente a algo mais, talvez na expectativa de que a reversão das coisas revelaria algo mais simples e mais atraente. O postulado das paralelas é uma proposição demasiado poderosa para ser esgotada por uma única identidade. O teorema de Pitágoras e o postulado das paralelas de Euclides são a mesma coisa. O primeiro conduz logicamente ao segundo; o segundo conduz logicamente ao primeiro. No Livro I de *Os elementos*, Euclides demonstra que $A + B + C = \pi$, onde A, B e C são os ângulos interiores de qualquer triângulo. É a Proposição 32. Mas $A + B + C = \pi$ é logicamente equivalente ao postulado das paralelas. Euclides demonstrara o que ele já havia pressuposto, com o postulado das paralelas exercendo

uma força deformadora sobre a própria estrutura de dedução euclidiana.

Tentativas de provar o postulado das paralelas continuaram esporadicamente nos 2 mil anos seguintes. Alguns matemáticos lançaram um olhar à questão e, depois de algumas poucas tentativas desconexas, se afastaram. O postulado das paralelas parecia um pequeno nó rígido, uma raiz torcida. Matemáticos da longa e brilhante Renascença Árabe ficaram tão intrigados pelo postulado das paralelas quanto os gregos antes deles. Escrevendo no século X, Ibn al Haytham pensava que o postulado talvez requeresse uma prova indireta. Euclides havia demonstrado vários teoremas em *Os elementos* assumindo que eles eram falsos e procurando pela contradição decorrente. Ibn al Haytham fez o mesmo; procurou suas inconsistências. Mas não achou nada: sua suposição, em prol do argumento de que o postulado das paralelas era falso, deixou tudo na mesma, cristalino e imperturbado.

Omar Khayyám, o autor do *Rubáyát* e matemático de destaque, não se esforçou para demonstrar o postulado das paralelas; procurando por algo melhor, ele estava entre os matemáticos permutadores. E não encontrou nada de interesse:

*Pois “É” e “Não é” ainda que com Régua e Linha
E “Em cima” e “Embaixo” pela Lógica eu defina
De tudo que se deve cuidar de sondar,
Nunca fui profundo a não ser em – Vinho.¹*

VOLTANDO-SE PARA a geometria após os rigores de sua educação jesuítica, o matemático do século XVII Girolamo Saccheri publicou um tratado em 1733, com o título otimista de *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides vindicado de toda falha). Muito apropriadamente, ele descartou esforços para derivar o postulado das paralelas de Euclides diretamente de outros axiomas de Euclides. Sua educação jesuítica permitiu que ele reconhecesse que um beco sem saída não tinha saída. Ele olhou para o outro lado, assumindo que o postulado das paralelas era falso para derivar aquela longa, legendária e fatal contradição a partir de sua

suposição. Saccheri conseguiu demonstrar muitas proposições interessantes. Ele chegou muito perto de descobrir a geometria não euclidiana; seus admiradores italianos, tais como Beltrami, lhe deram tanto crédito por falhar, como teriam dado a um matemático francês por triunfar. Saccheri era astuto, capaz e penetrante. Mas nunca encontrou a contradição que antecipava.

Não lhe ocorreu que ela não estava lá. Não ocorreu a *ninguém*.

As coisas ficaram assim até Gauss começar a cogitar, nos últimos anos do século XVIII, se a própria tentativa de derivar o postulado das paralelas de Euclides de outros axiomas de Euclides, ou de qualquer outra coisa, não estivesse condenada ao fracasso – e não simplesmente difícil. Nenhuma derivação havia sido descoberta, raciocinou Gauss, porque nenhuma era possível. Ele ainda era um adolescente, um jovem de dezesseis ou dezessete anos. Já tinha elaborado ideias notáveis. Gauss se recusou publicar seus pensamentos mais tarde na vida, preferindo, quando outros tinham publicado suas próprias ideias, observar que já as conhecia de antemão.

O que era verdade na maior parte das vezes.

É POSSÍVEL, sem dúvida, colocar o postulado das paralelas de Euclides em custódia protetora, o pequeno lunático trancado numa cela acolchoada, de modo que os teoremas resultantes sejam derivados inteiramente das quatro primeiras suposições de Euclides. O sistema resultante é chamado de geometria neutra, um termo que poderia sugerir uma estrutura matemática insípida. Nem tanto. Afinal de contas, Euclides demonstrou suas primeiras 28 proposições por meio dos axiomas de geometria neutra. Mas se a geometria neutra não é insípida tampouco é atraente. Ela faz o óbvio. É o postulado das paralelas que é todo brilho e fulgor louco, e *e/e* faz o resto.

Os matemáticos do século XIX que começaram a desconfiar do postulado das paralelas podiam escolher aceitá-lo como um axioma ou descartá-lo como um entrave. Euclides tinha aceitado. Bolyai e Lobachevsky rejeitaram o que Euclides havia cancelado,

argumentando por uma descarada negação do postulado das paralelas. As possibilidades surgidas eram desordenadas. No decorrer de 2 mil anos, *Os elementos* de Euclides chegou a parecer irrefutável. Avultava como um monumento. Agora o monumento parecia desfigurado, ou, se não desfigurado, danificado de alguma forma.

No mundo além da matemática, a geometria não euclidiana representou uma revolução no pensamento – e o pensamento do século XIX era simpático a revoluções. Houve muitas delas. Os detalhes da geometria não euclidiana eram de interesse apenas dos matemáticos, é claro, mas sua existência provocou uma certa ansiedade entre os filósofos. “Além da geometria euclidiana”, observou Bertrand Russell ao lembrar suas próprias experiências, “havia diversas variedades não euclidianas, e ... ninguém sabia qual estava certa.” Uma fenda se abriu na crosta da matemática. Russell pensou ter visto algo temível subjacente. “Se a matemática era duvidosa, o quanto mais duvidosa deveria ser a ética”, escreveu. “Se nada fosse conhecido, não se poderia saber como uma vida virtuosa deveria ser vivida.”

Não surpreende Russell se lembrar que tais inferências perturbaram sua adolescência. A geometria euclidiana lhe havia oferecido um ponto fixo de certeza. Agora se fora; ele sentiu-se à deriva. Ao seu redor, inferências similares haviam ganhado força. Não eram de modo algum anacrônicas: elas haviam mantido sua força. Hoje está disseminada a impressão de que, se a ciência exige alguma coisa, é uma rejeição não sentimental do senso comum, uma recusa de princípios que serviram à raça humana por milhares de anos. “Minha suspeita pessoal”, observou certa vez o biólogo evolucionista J.B.S. Haldane, “é que o Universo é não somente mais bizarro do que supomos, é mais bizarro do que podemos supor.”

O que são o senso comum ou a experiência humana comum quando colocados diante de tal exorbitante bizarrice?

Matemáticos lutaram por séculos para provar o postulado das paralelas de Euclides. Eles estavam certos em sentir sua

importância. Mas estavam errados em pensar que podiam prová-lo. No século XIX, eles desistiram de tentar. O advento da geometria não euclidiana assinalou o primeiro de uma série de choques percussivos. Se as novas geometrias eram estranhas, teorias por vir o seriam ainda mais. As reivindicações do senso comum e da experiência comum foram avaliadas e então rejeitadas: “Foste pesado nas balanças e foste descoberto carente.”^c

ESTRANHAMENTE, as possibilidades para o desenvolvimento de geometrias não euclidianas deveriam ter sido evidentes bem antes do século XIX. Os capitães de navios ingleses, espanhóis e portugueses navegando pelos grandes oceanos sabiam perfeitamente bem que uma linha reta não era necessariamente a distância mais curta entre dois pontos. Poderia ter sido uma pista, que se tornou óbvia hoje nos trajetos de avião. Sobre a superfície da Terra, a distância mais curta entre dois pontos é o arco de uma grande curva. Voando de aurora a aurora, passageiros da América do Norte, atendendo o à nossa esquerda, pessoal, descubrem-se olhando para as neves de algum horror hiperbóreo. Os geômetras chamam o arco de voo de *geodésica*, um termo útil que veio definir a distância mais curta entre quaisquer dois pontos, não importa o espaço subjacente.

O plano euclidiano é uma superfície de antigamente, assim como a superfície da Terra – a primeira, conhecida a partir de manuais, a segunda a partir da vida. Uma superfície esférica envolve uma esfera, duas dimensões enroladas em torno de três. Quando a esfera é fatiada por um plano passando pelo seu centro, o plano traça um círculo sobre sua superfície interior. Entre quaisquer dois pontos, o círculo descreve uma geodésica.

A superfície da Terra é um modelo de geometria esférica. O quadro-negro euclidiano é plano, mas a superfície da Terra é curva – e com a mesma curvatura em todos os pontos. E é *positivamente* curva, uma designação que inexplicavelmente sugere uma realização geométrica semelhante a comer demais. Em geometria

esférica, linhas retas são arcos e não existem linhas paralelas. Geodésicas errantes atravessam umas às outras ao circum-navegar o globo. As linhas de latitude são paralelas, mas, com exceção do equador, não são geodésicas. Os ângulos interiores de um triângulo somam mais de 180 graus. Figuras euclidianas sobre a esfera abaúlam-se como se explodissem.

Mesmo que seja rebaixado sobre a superfície de uma esfera, Euclides não pode ser totalmente negado. Geodésicas sobre a superfície de uma esfera, afinal, estão sobre sua *superfície*. O interior de uma esfera continua fazendo parte do domínio geral euclidiano. Descartado esse véu de indiferença, as linhas retas euclidianas retornam à proeminência. A distância mais curta entre duas praias ensolaradas é uma linha reta perfurando a Terra de um ponto a outro.

O furo é um lembrete. Sempre que é descartado, Euclides tem uma tendência de ressurgir em qualquer exercício de geometria não euclidiana como um espaço abrangente, uma estrutura contrastante, um fantasma incrivelmente durável. Mas será que esse fantasma insiste por alguma boa razão? Uma formiga pode determinar o caráter não euclidiano de uma esfera sem *qualquer* contraste euclidiano à sua disposição. Ela pode muito bem concluir a partir de indícios puramente locais que a superfície de uma esfera é curva.

Formiga esperta.

Mas, enquanto a formiga está olhando a superfície de uma esfera, quem está olhando para a formiga, e de que perspectiva?

Aqui entra o fantasma.

GAUSS HAVIA COMPREENDIDO os princípios da geometria não euclidiana; tinha exercido seus pensamentos provocativos no silêncio de seu gabinete. Mas foram o matemático húngaro János Bolyai e o matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky que fizeram todo o resto.

Nenhum relato na história da matemática é mais romântico. O pai de Bolyai, Farkas, foi um matemático amador; costumava se corresponder com Gauss. O postulado das paralelas de Euclides o obcecava. Considerava o fracasso em estabelecer o postulado das paralelas como “uma eterna nuvem sobre a verdade virgem”. As demonstrações que enviava ansiosamente para Gauss eram prontamente respondidas, os erros assinalados. O filho de Bolyai, János, era, sob todos os aspectos, um prodígio e um poliglota, mestre em nove idiomas complexos, matemático de destaque, um homem de muitos dons. Autoconfiante e independente, vivia envolvido em duelos, danças e dívidas; passou anos no serviço militar. E, assim como o pai, era obcecado pelo postulado das paralelas.

O pai via o filho a caminho do mesmo desfiladeiro escuro e sinistro que por tanto tempo obcecara ele próprio. Dedicou-se a alertá-lo por meio de cartas que mesclavam a plangência e a histeria do apito de um trem: “Não se envolva de forma nenhuma com as paralelas. Conheço todos os volteios e meandros e já perambulei por essa noite insondável, que extinguiu toda a luz e alegria da minha vida. Eu suplico, em nome de Deus. Deixe as paralelas em paz.”²

Ouve-se o ribombar de trovões em todas as velhas nuvens húngaras, o clarão de relâmpagos, bazófias acumuladas, pai e filho retrocedendo:

Cinza sobre a luva de um velho

É toda a cinza que deixam as rosas queimadas.

Poeira suspensa no ar

*Marca o lugar onde uma história acabou.*³

BEM MAIS ALÉM para o leste, um matemático russo, Nicolai Ivanovitch Lobachevsky, estava penetrando o mesmo desfiladeiro negro e considerando-o inteiramente do seu gosto. Assim como Bolyai, Lobachevsky era um homem de poderes intelectuais celebrados desde sua juventude. Era original, determinado, disciplinado e dado

ao trabalho árduo. Quando descobriram que ele estava preparado para realizar bem qualquer tarefa que lhe fosse atribuída, funcionários da Universidade de Kazan passaram a designar todas as tarefas a Lobachevsky e não tinham dúvida de que ele as cumpriria bem. Nisso eles não estavam enganados. Mesmo conhecendo pouco sobre arquitetura, Lobachevsky criou um projeto majestoso e imponente para novos prédios da universidade. Tornou-se o centro administrativo da vida matemática, lendo propostas acadêmicas, entrando em contato com outros matemáticos, aplacando a faculdade e agradando-a, lidando habilmente com a burocracia na qual a universidade vivia – seus intermináveis contadores, encarregados de pesquisa, mascates de patronato, censores. Tornou-se o encarregado da biblioteca da universidade. Antes de sua posse definitiva, a biblioteca era pouco usada e mal administrada, com ratos se esgueirando pelas suas prateleiras. Lobachevsky encadernou os livros velhos, encomendou novas revistas; ele colocou o lugar em ordem.

A REJEIÇÃO DE LOBACHEVSKY do postulado paralelo, que ele publicou na *Kazan Messenger* em 1829, não poderia ter sido mais severa. Em lugar do plano euclidiano de outrora, surge um plano hiperbólico do novo. Ambos os planos são planos no sentido em que são superfícies bidimensionais. Aí termina a semelhança. Se o plano hiperbólico fosse como o plano euclidiano, não haveria motivo para negar o postulado das paralelas de Euclides. E aí jaz a loucura.

As ilustrações de Lobachevsky do plano hiperbólico foram planejadas para caber numa pequena região do plano euclidiano, mas, além das margens das ilustrações, o plano hiperbólico parte da planura, virando-se como uma casca de laranja de dentro para fora. As ilustrações, não obstante, transmitem algo incomum e estranho. Há uma linha reta R , um ponto B marcado sobre a linha, um ponto P em algum lugar além de R ; há linhas retas x e y que passam por P ; e há um ângulo θ (Figura 9.1).

Se θ for menor do que 90 graus, as linhas retas passando por P mais cedo ou mais tarde vão encontrar a linha R . Se θ for igual a 90 graus, será uma reversão a Euclides. Essa reversão marca os limites do conhecido.

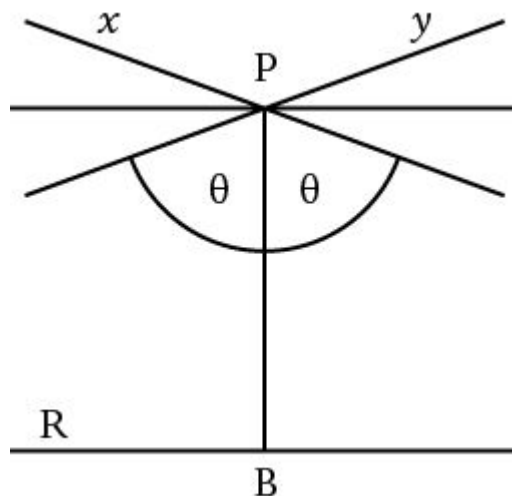


FIGURA 9.1. O plano hiperbólico

Mas se θ for *maior* do que 90 graus? Primeiro, essas linhas retas são retas. Segundo, elas são paralelas à linha R . E, terceiro, existe *mais do que uma* delas.

Os teoremas decorrentes são uma imposição ao senso comum. Os ângulos interiores de um triângulo hiperbólico somam *menos* que 180 graus: $A + B + C < \pi$. Triângulos semelhantes são todos congruentes. Linhas que são paralelas a uma dada linha não precisam ser paralelas a outra. A circunferência de um círculo cujo raio é R é *maior* do que $2\pi R$.

E o postulado das paralelas de Euclides é falso.

COM UMAS POUCAS e simples linhas retas, Nicolai Ivanovich Lobachevsky colocou a negação do postulado das paralelas de Euclides diretamente sobre uma página plana euclidiana. Os teoremas que ele derivou em sua obra-prima, o fez de maneira apropriada. Eram impecavelmente decorrentes dos axiomas de

geometria neutra e da negação do postulado das paralelas de Euclides. O motor da inferência ronronava sem pausa.

Mas, para ser convincente, a negação do postulado das paralelas de Euclides requer mais do que uma derivação. Exige um modelo, e assim um modo de ser verdadeira. As ilustrações já tinham feito o que ilustrações podem fazer. Se não existe um modelo disponível, não há razão para supor que a negação do postulado das paralelas e dos axiomas da geometria neutra são consistentes, que se apoiavam mutuamente. Se não são, estamos de volta ao ponto lógico a partir do qual a geometria não euclidiana representou um voo. Uma inconsistência indicaria uma contradição entre a negação do postulado das paralelas e os axiomas da geometria neutra.

E isso é precisamente o que nenhum matemático tinha sido capaz de descobrir.

POR ESSA RAZÃO, as imagens foram bem-vindas quando evocadas. Elas revelaram um mundo que poderia satisfazer os axiomas da geometria não euclidiana. Eram uma fonte de inspiração e, portanto, uma fonte de alívio.

Podia ser feito. Era o que os modelos sugeriam.

A *Kazan Messenger* já não mais existia quando, em 1868, o matemático italiano Eugenio Beltrami publicou seu influente estudo “Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea” (Um estudo da interpretação da geometria não euclidiana). Com o estudo, um modelo: a pseudoesfera de Beltrami. A pseudoesfera é estranha a ponto de despertar a suspeita de que *qualquer coisa* pode ser verdadeira sobre sua superfície.

As ilustrações da pseudoesfera de Beltrami são vívidas e até adoráveis, mas são incompletas (Figura 9.2). Uma das razões é que o centro da pseudoesfera é cercado pelo que é nitidamente um círculo ou anel euclidianos. O que ele está fazendo ali? E outra razão é que a *embouchure* [embocadura] dos chifres da pseudoesfera, onde um corneteiro divino poderia pôr os lábios,

recua na vida real a uma distância infinita. Isso nenhuma ilustração pode mostrar.

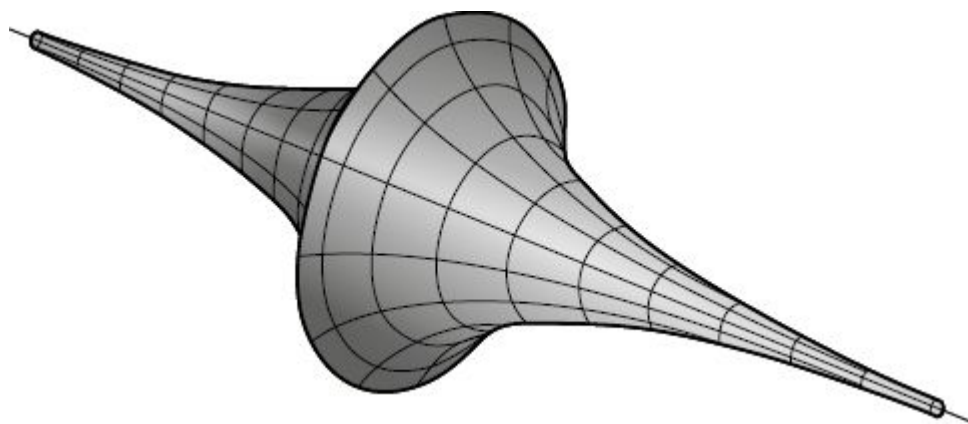


FIGURA 9.2. Pseudoesfera de Beltrami

Mesmo não sendo completas, as ilustrações da pseudoesfera de Beltrami são instigantes. Elas mostram um universo se formando. Formas ocultas pelas demonstrações de Lobachevsky vêm à vida na imagem de Beltrami. O triângulo é um exemplo. O triângulo euclidiano é uma forma conhecida na arte e na arquitetura, com seus lados pairando ou atarracados. Quando inscritos na pseudoesfera de Beltrami, os triângulos euclidianos arqueiam para dentro, com os lados côncavos, e os ângulos interiores ficam comprometidos desde sempre pela curvatura negativa da superfície (Figura 9.3). Os ângulos interiores de um triângulo sobre uma pseudoesfera somam *menos* do que dois ângulos retos. Sobre uma superfície suficientemente curvada, esses ângulos interiores terão sorte se resultarem em qualquer coisa.

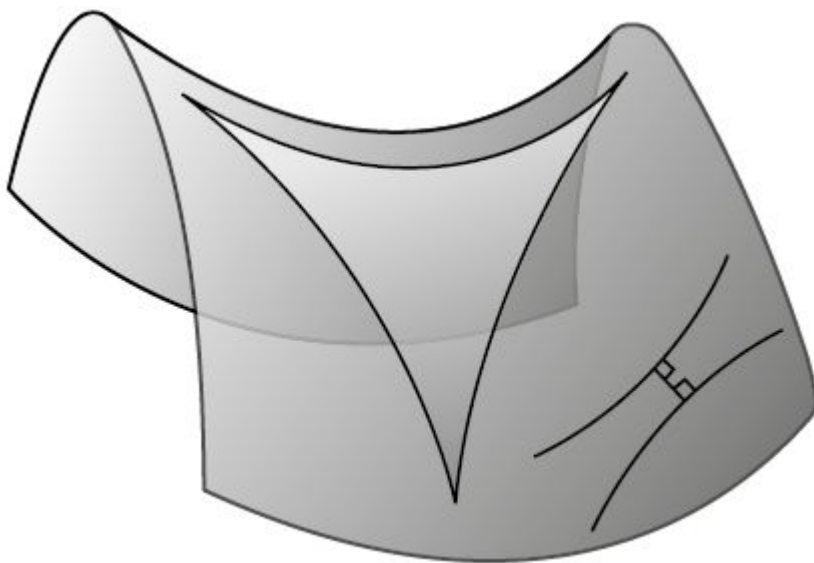


FIGURA 9.3. Triângulo hiperbólico

EM 1880, O GRANDE matemático francês Henri Poincaré acrescentou outro modelo à crescente galeria de modelos não euclidianos e, em seu disco de Poincaré, uma outra imagem. A pseudoesfera de Beltrami suscita o matemático a pegá-la pelos dois chifres e, quem sabe, dar uma buzinação. Mas ninguém quis pegar o disco de Poincaré. Entre os matemáticos que compreenderam sua natureza, ninguém se sentiu tentado a chegar perto dele.

O disco de Poincaré divide o plano euclidiano em três regiões distintas do espaço. Existem os pontos *além* do disco, os pontos *sobre* sua circunferência, e os pontos no seu *interior*. Do lado de fora, o disco é simplesmente uma pequena unidade circular, fixa e finita como uma moeda. A partir de dentro, o disco abrange todo o plano hiperbólico infinito. Do lado de fora do círculo, tudo é euclidiano, e dentro, tudo hiperbólico. Exterior e interior são euclidianos por fora, mas hiperbólicos por dentro. O interior é acessível a partir do exterior – *entrada permitida* –, mas não o exterior a partir do interior – *sem saída*.

Não há distinção entre pontos euclidianos e hiperbólicos. Pontos são pontos. Linhas hiperbólicas são outra coisa. Não se parecem em nada com linhas euclidianas e requerem uma definição cuidadosa. Essas cuidadosas definições matemáticas expressam e

tornam preciso algo como uma sequência onírica em que o disco de Poincaré flutua serenamente no plano euclidiano, um círculo entre outros círculos. De vez em quando, um círculo errante penetra a circunferência do disco de Poincaré, depositando, antes de prosseguir, o segmento de um arco de circunferência em seu interior, que intercepta a circunferência em ângulos retos. Esses arcos euclidianos são as linhas retas do plano hiperbólico. São linhas porque são linhas e são retas porque, embora curvas no exterior, são retas no interior (Figura 9.4).

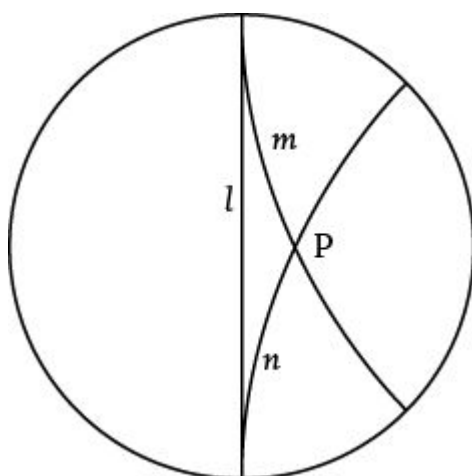


FIGURA 9.4. Disco de Poincaré

NA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA, ideias que na maioria das circunstâncias se dissipariam agrupam-se. Isso é especialmente verdadeiro quanto ao disco de Poincaré. A força aglutinadora requerida para agrupar uma ideia dissipadora é expressa pela definição de distância hiperbólica. No plano euclidiano, a distância $d(x, y)$ entre dois pontos x e y é o comprimento da linha mais reta que as conecta: $ds^2 = dx^2 + dy^2$. As raízes quadradas são elevadas ao quadrado nessa fórmula para preservar o caráter positivo da distância. Distâncias não podem ser negativas. Mas as distâncias euclidianas são ineficazes dentro do disco de Poincaré. Sua introdução não faria mais do que ratificar todos os velhos postulados e preconceitos euclidianos. Existe, em vez disso, uma distância hiperbólica, uma medida que justifica, se algo fizer isso, a característica anômala do disco.

Definir a distância hiperbólica entre quaisquer dois pontos no disco de Poincaré requer, como é de esperar, várias ideias não familiares. Estas são úteis; mas não são familiares. Mas algum senso de distância anômala torna-se acessível por meio de uma fórmula que determina apenas a distância do centro do disco de Poincaré à sua circunferência. Uma vez dada, segue-se uma plena definição de distância. A fórmula é $ds = \frac{2dr}{(1 - r^2)}$. O símbolo ds designa a distância hiperbólica de uma linha radial originando-se no centro do disco e seguindo serenamente até sua circunferência. O símbolo dr mede sua distância *euclidiana*. Duas medidas diferentes de distância foram atribuídas a uma e à mesma linha, mas elas são codependentes. A distância hiperbólica foi definida em termos de distância euclidiana. A questão da distância do centro do disco à sua circunferência recebe assim duas respostas inteiramente distintas. Posicionado fora do limite do disco de Poincaré, o geômetra euclidiano vê que a circunferência do disco está ao longo de seu raio a uma unidade de distância do centro. *Quão longe? Não longe*. Mas, à medida que r se aproxima de 1, ds se aproxima do infinito. Estando no centro do disco e caminhando penosamente em qualquer direção, o geômetra hiperbólico vê a circunferência sempre se afastando. *Quão longe? Muito longe*.

Diferenças em distâncias se ramificam pelo plano hiperbólico. Pelo lado de fora, o geômetra euclidiano pode observar que, dentro do disco, as distâncias se contraem quando seu colega hiperbólico avança numa linha em direção ao limite. Aquele pobre tolo gordo está encolhendo diante de seus olhos. Isso o geômetra hiperbólico não vê. Ele está indo em direção ao limite precisamente enquanto repousa no centro. Tudo está como estava.

A DEFINIÇÃO DE DISTÂNCIA pela qual o mundo hiperbólico é regido desmantela o axioma de Playfair. As linhas curvas do disco são retas porque são geodésicas, e são geodésicas porque representam a distância mais curta entre dois pontos. O geômetra euclidiano

pode lançar um olhar imparcial ao disco de Poincaré e perceber por que o postulado das paralelas de Euclides falha.

O PONTO P ESTÁ em algum lugar sobre o disco, e duas linhas m e n passam por P , ambas aproximando-se da circunferência em dois pontos diferentes A e B , o lugar – o próprio – no qual AB passa pela circunferência em seu caminho rumo à glória estritamente euclidiana.

A corda PA é paralela a l porque PA e AB não se cruzam *dentro* do disco de Poincaré. Como poderiam? Em A , elas têm um ponto comum de intersecção no limite. Estritamente euclidiano, este ponto de intersecção está localizado além do interior do disco. Consideradas como linhas hiperbólicas, tanto AB como PA estão infinitamente longe de A .

Assim, AB tem em PA uma linha paralela que satisfaz as condições do axioma de Playfair.

Mas AB encontra a circunferência *duas vezes*, uma em A e outra em B . Duas linhas passam por P , e *ambas* são paralelas a AB .

POINCARÉ ERA UM MATEMÁTICO poderoso e um filósofo sutil. Fez um pêndulo oscilar bastante, mas ele sabia tudo sobre pêndulos, e sabia muito bem que, depois de oscilar num grande arco, os pêndulos tinham tendência a parar.

“Consideremos um certo plano”, escreveu Poincaré num livrinho brilhante intitulado *Science and Hypothesis*, “o qual devo chamar de plano fundamental, e vamos elaborar uma espécie de dicionário fazendo uma série de termos escritos em duas colunas, correspondendo um a cada um, exatamente como dicionários comuns com palavras em duas línguas com o mesmo significado correspondem uma à outra.” As palavras contidas nesse dicionário são *espaço, plano, linha, esfera, círculo, ângulo, distância*, e assim por diante:

Vamos agora pegar os teoremas de Lobachevsky [sic] e traduzi-los com a ajuda deste dicionário, como traduziríamos um texto em alemão com a ajuda de um dicionário alemão-francês. *Devemos então obter os teoremas de geometria comum* [itálicos no original]. Por exemplo, o teorema de Lobatschewsky [sic]: “A soma dos ângulos de um triângulo é menor que dois ângulos retos” pode ser traduzido assim: “Se um triângulo curvilíneo tem como lados arcos de círculos que se produzidos cortariam ortogonalmente o plano fundamental, a soma dos ângulos deste triângulo curvilíneo será menor que dois ângulos retos.”

Com essas observações, Poincaré convidou um afrontado senso comum a readquirir uma voz ativa na Sociedade Anônima Euclidiana. Os teoremas de geometria hiperbólica são teoremas de geometria euclidiana; são teoremas de geometria euclidiana disfarçados por uma nova e radical definição de distância. Numa tradução reversa, cai o disfarce. Velhos rostos conhecidos voltam a aparecer. Geometria euclidiana e geometria hiperbólica *não são* duas teorias inteiramente diferentes. Elas coincidem na sua avaliação da verdade. Há amizade entre elas.

E Euclides? O que poderia ter dito *der Alter*? Poderia ter dito que encontrar uma interpretação de distância sob a qual o postulado das paralelas malogra é um interessante exercício em má orientação, mas longe de suas próprias preocupações. Um filósofo disposto a duvidar que a neve é branca, baseado em que “neve” pode significar bauxita, não deveria ser considerado um descobridor de alguma coisa sobre a neve.

Euclides poderia ter dito isso.

EM 1872, O MATEMÁTICO alemão Felix Klein proferiu uma palestra na Universidade de Erlangen sob o título “Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen” (Uma consideração comparativa de recentes desenvolvimentos em geometria). A palestra estava mais para manifesto. Klein havia acabado de entrar para o corpo docente da universidade, Herr Professor e Herr Klein dividiam o pódio, uma sala e um espaço sobre as mesmas linhas pontilhadas; e seu manifesto tornou-se conhecido como o Programa de Erlangen.

O Programa de Erlangen era um chamado à classificação e, portanto, um chamado às armas. Geometrias estranhas proliferavam pelos círculos matemáticos europeus. Seu significado, Klein argumentava, não poderia ser avaliado até que suas relações fossem compreendidas. O querido Euclides do mito e da memória era mais absorvido que rebaixado, a geometria euclidiana encontrava um lugar no esquema de Klein, porém um lugar entre muitos.

A classificação que Klein impôs sobre o mundo indisciplinado da geometria do século XIX era tanto geométrica como algébrica. O principal negócio da lei é, como Charles Dickens observara, fazer negócios para si mesma. É um princípio que não costuma falhar na matemática. No caso de haver dois sistemas em funcionamento na classificação de várias geometrias, sua análise poderia ocupar os matemáticos por mais de um século. E foi o que aconteceu.

A análise de Klein apresentava uma reversão a certos componentes da vida familiar na qual a geometria euclidiana é como um filho mimado e querido cercado, especialmente em ocasiões cerimoniais, por uma curiosa constelação de tios: uma geometria elíptica, afetuosa, jovial, exuberante. A geometria hiperbólica seria sombria, carrancuda, soturna, suas visitas lembrando a todos que família, afinal, é família; e a geometria projetiva seria equilibrada, lúcida, sábia, *der Onkel*, aos olhos de Klein, um tio entre tios, mas de qualquer modo um chefe entre eles.

A geometria projetiva floresceu na alta Renascença como método de pintura, um modo de capturar nas duas dimensões das telas esticadas um mundo que insiste em conduzir seus negócios em três. No mundo real, trilhos de trem se afastando a distância mantêm uma distância fixa um do outro, mas no mundo do pintor eles convergem na direção de um ponto distante, insondável e prolongado. Artistas chineses não ligavam para perspectiva, e crianças pequenas não a percebem.

O plano projetivo é muito parecido com o plano euclidiano; existindo em duas dimensões, ele se situa entre o olho humano ou a

tela do artista e um objeto ou uma paisagem em três dimensões. As escolas de arte do século XIX costumavam encorajar os estudantes a dominar a perspectiva desenhando diretamente sobre um painel achatado de vidro mantido diretamente diante de uma cena.

A CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS é uma parte do programa de Erlangen. A outra parte é, como outras partes costumam ser, mais interessante porque é mais algébrica e, portanto, mais abstrata. Évariste Galois, morto precocemente num triste duelo – rival, romance, revólver –, já havia composto sua obra sobre corpos cem anos antes de Steinitz, apresentando os matemáticos às maiores e mais poderosas das abstrações algébricas sobre a noção de grupo. Os matemáticos, subsequentemente, fizeram o que Steinitz orientara a fazer, separando o grupo de seus exemplos. Um grupo G é um conjunto de objetos $G = \{a, b, c, \dots\}$. Esses objetos estão fechados sob uma operação associativa, a o b . Uma *operação*, significando que a está se impondo sobre b . *Fechada*, significando que, seja qual for a operação, o resultado ainda está em G . *Associativa*, significando que $(a \text{ o } b) \text{ o } c = a \text{ o } (b \text{ o } c)$. Existe um elemento de identidade no grupo e tal que, para todo elemento a do grupo, $a \text{ o } e = a$. E, para todo elemento a , um inverso a^{-1} , tal que $a \text{ o } a^{-1} = e$. Os números inteiros positivos e negativos formam um grupo sob a velha operação familiar de adição. Sempre que dois números inteiros são somados, o resultado continua sendo um número inteiro. A soma de números inteiros é uma operação indiferente à ordem temporal e, portanto, é associativa. Não importa se 3 e 5 são somados primeiro e depois somados a 12, ou se 5 e 12 vão primeiro, com 3 anexado em seguida. Zero é um elemento de identidade para esse grupo. Quando somado a qualquer número inteiro, ele não faz absolutamente nada. E todo número inteiro tem um inverso em seu reflexo negativo de espelho: 5 somado a -5 retorna taciturnamente a zero.

Não há nada mais do que isso, embora possa ser dito que já é o suficiente.

Quais são, então, os grupos aos quais a geometria poderia ser ligada? Esta é a questão de Klein. Quais são os grupos euclidianos? Os nossos.

Depois de olhar um longo tempo para o quadro-negro euclidiano, o geômetra, vamos dizer, consegue penetrar sua superfície e se movimentar ao redor. Uma vez dentro do quadro-negro, ele pode se mover por translação, rotação ou reflexão. O geômetra em si é desnecessário para as ideias que se seguem. Pode-se dar licença para desaparecer discretamente. A ideia de um movimento permissível pode permanecer como seu traço matemático.

O plano euclidiano abrange pontos e existe em duas dimensões. Em translação, o geômetra vai de um ponto a outro ao longo de uma linha reta. A translação continua como uma transformação – ou mapeamento – do plano de volta a si mesmo, um mapeamento ponto a ponto tal que o lugar de partida remete ao lugar de parada. Tudo o mais permanece o mesmo. Rotações e reflexões são também mapeamentos do plano euclidiano sobre si mesmo, um modo abstrato de registrar o que o geômetra fez sem a sua ressurreição.

Essas transformações – ou mapeamentos – são os elementos de um grupo. A operação de grupo é a sucessão de transformações. Transformações que levam a transformações, por sua vez. É razoavelmente fácil conseguir identidades e inversos entre as transformações. Matemáticos vêm fazendo isso há mais de duzentos anos.

Se as transformações preservam as distâncias, de forma que, sob sua ação, coisas que estavam bem separadas permanecem no mesmo grau de separação, a transformação é chamada de *isometria*, e o resultado é um famoso velho grupo da física matemática, o grupo euclidiano $E(n)$. Trata-se de um grupo com tantos braços quanto Vishnu, descrevendo o plano se $n = 2$, e o espaço se $n = 3$. As próprias transformações são chamadas de movimentos euclidianos.

Se essas isometrias preservarem sua orientação, além da distância, no sentido dos ponteiros do relógio indo no sentido dos ponteiros do relógio, e o reverso, o grupo euclidiano se torna o grupo euclidiano especial $SE(n)$. É um grupo importante em mecânica analítica; ele descreve o comportamento de objetos rígidos. Por essa razão, transformações são chamadas de movimentos de corpos rígidos, uma designação meio espasmódica, dentro das circunstâncias, e esses movimentos de corpos rígidos são exatamente as boas e velhas translação, rotação e reflexão.

A CLASSIFICAÇÃO DE VÁRIAS geometrias considerando seus grupos incorporou um grande e generoso programa de pesquisa de ponta. Incorporou, também, o último estágio de um drama em andamento dentro da geometria euclidiana. Ao escrever há tanto tempo, Euclides reteve uma conexão vital entre suas estruturas geométricas e certo poder puramente humano de fazer coisas se moverem no espaço. Na teoria de grupos, este poder é promovido a um panteão abstrato e depois desaparece em favor das transformações de grupos, suas ações, como dizem às vezes os matemáticos, o elo que é rompido em teoria, retornando em etimologia. Hoje, a promoção à abstração é geral na geometria euclidiana: os *formatos*, as formas platônicas, incompreensíveis mas insubstituíveis; as *construções*, as derivações; a *régua e compasso*, os números; o *movimento* euclidiano, as transformações.

E a Sociedade Anônima Euclidiana?

A propriedade foi diluída. Há outros membros na diretoria. Um novo sentimento prevalece. Mas a velha Sociedade Anônima Euclidiana é ainda conhecida por seu nome próprio: Sociedade Anônima *Euclidiana*.

^c Daniel 5:27. (N.T.)

10. Euclides, o Grande

Seja o que for que nos retire do poder de nossos sentidos, seja o que for que faça o passado, o distante ou o futuro predominar sobre o presente, nos adianta na dignidade de seres pensantes.

SAMUEL JOHNSON

A GEOMETRIA EUCLIDIANA clássica é, num sentido estrito, uma disciplina esgotada. Nenhum estudante de matemática se ocupa em acrescentar aos teoremas que Euclides demonstrou outros que ele pode ter omitido.

O velho carvalho robusto, tendo resistido à ação de tantas tempestades de inverno, ocasionalmente apresenta umas poucas novas folhas resplandecentes. Em 1899, o matemático americano Frank Morley descobriu um teorema refinado e belo. No ponto de intersecção de três ângulos trissecados existe sempre um triângulo equilátero.

Por mais belo que seja o teorema de Morley, muito do que poderia ter sido descoberto por meio do sistema euclidiano já o *foi*. Com tão pouco ainda para aprender, o estudo de problemas euclidianos difíceis tornou-se algo como uma obsessão recreativa. São problemas fáceis de colocar, mas difíceis de provar. O teorema de Steiner-Lehmus é um exemplo. Qualquer triângulo cujos ângulos bissetores sejam iguais é isósceles? De vez em quando, um matemático talentoso, estando seguro de poder resolver esse problema rapidamente, tenta resolvê-lo rapidamente, para reaparecer dias ou semanas mais tarde dizendo, se for sincero: *Consegui, mas isso quase me matou*.

AOS MATEMÁTICOS, EUCLIDES ofereceu um método de demonstração e assim um modo de vida. Que esse método tenha permanecido

como um ideal por mais de 2 mil anos é notável. Como grego culto que era, as sensibilidades de Euclides devem ter sido formadas pelos épicos homéricos, tão familiares aos homens de seu tempo e lugar como Shakespeare é para nós. Porém, se os épicos homéricos sobreviveram no cofre da memória grega, o estilo homérico já tinha caído em desuso na época em que Euclides rabiscava seu primeiro diagrama no pó. O estilo tinha desaparecido com seu autor. Isso vale até hoje. Ninguém senão um lunático pensaria em compor um poema épico.

O estilo euclidiano permanece. Ele é vital, um ideal, uma vantagem moral – um corretivo a tudo que for esponjoso, mole, indistinto, desleixado, meio oculto, malformado, malpassado. Ou apenas meio certo, representando a mente em plena posse de seus poderes, reta como uma flecha, dura como uma pedra, descompromissada como um banco. “O homem pré-científico”, observou o brilhante e original matemático francês René Thom, “deve ter tido um conhecimento implícito da geometria do espaço e do tempo.” O homem pré-científico obviamente conhecia seu ambiente, de outra maneira ele não teria sobrevivido. Mas, “apenas com o advento da geometria grega”, Thom acrescenta, “esse conhecimento obteria uma forma explícita, portanto, *dedutiva*” (destaque do autor).¹

Na vida moderna, ser explícito é ser franco, e assim disposto a não ter tato na discussão de detalhes sexuais ofensivos. Esse sentido da palavra é secundário. Derivada do latim *explicare* e do francês *explicite*, a palavra significa desvelar; traz a conotação de revelação progressiva. A lenta e penosa tarefa pela qual os teoremas da geometria euclidiana são derivados de seus axiomas é um esclarecimento. O mundo dos sentidos retrocede. A mente expande. Uma figura nova e complexa emerge no pensamento, figura que expressa a relação entre os axiomas de um sistema, seus teoremas e suas ilustrações. A relação não pode ser vista de uma vez; ela deve ser compreendida. Não é imediata; ela deve ser adquirida. Um sistema axiomático é como a sonata ou o romance do século XIX. Onde o ouvinte escuta primeiro uma sucessão de

melodias, o matemático ouve um tema e seu desenvolvimento. Um sentido de coerência precisa ser conquistado. Não chega até nós pronto para uso.

E não vem facilmente.

QUANTO TEMPO? Quanto tempo está destinado a durar o rigoroso ideal euclidiano?

O propósito de uma demonstração é criar credibilidade. Violência geralmente funciona para compelir a concórdia – se não violência, a sua ameaça. Mas uma credibilidade que não for dada livremente não pode ser facilmente extorquida. Os matemáticos sabem disso. Eles depositam sua confiança em suas demonstrações.

Escrevendo na edição de dezembro de 2005 de *Notices of the American Mathematical Society*, o matemático Brian Davies via a dúvida insinuando-se em todos os lugares sagrados com suas patinhas de rato. Em 1931, Kurt Gödel demonstrou que a aritmética de números inteiros é incompleta. Apesar de seu sistema axiomático, a aritmética tinha limites, e certas proposições do sistema não podiam ser demonstradas no sistema. Gödel defendeu seus resultados provando-os. Mas isso, por si só, não solapou a certeza da matemática. Uma prova é uma prova, afinal. Não faz nada para aumentar a certeza da matemática, por outro lado.

A decisão dos matemáticos de permitir que certas demonstrações fossem completadas (ou verificadas) pelo computador foi adotada na década de 1970. Ela tem provocado ceticismo desde então. Em 1852, Francis Guthrie perguntou se algum mapa poderia ser colorido com o uso de apenas quatro cores para marcar suas regiões distintas. Ninguém sabia. Simples de colocar, o problema é difícil de resolver. Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken ofereceram à comunidade matemática uma demonstração do teorema das quatro cores. Ela exigia que um grande número de casos separados, que nunca poderia ser verificado à mão, fosse verificado pelo computador.

Ninguém pensou que a demonstração de Appel e Haken fosse equivocada. Ninguém estava totalmente convencido de que não fosse. Ninguém sabia o que pensar. Até hoje, ninguém sabe.

Davies levanta outro ponto, mais triste e mais pungente. Os grupos simples finitos estão espalhados pela matemática. Classificá-los tem sido um projeto considerável, envolvendo muitos matemáticos. As demonstrações atualmente chegam a dezenas de milhares de páginas, mas, diz um resenhista de “Whither Mathematics?” sobre o ensaio de Davies sobre esta questão: “Ninguém sabe com certeza se o todo desse trabalho constitui uma prova completa e correta ... Tanto tempo se passou que os protagonistas que realmente compreendiam a estrutura da classificação estão morrendo ou se aposentando, deixando aberta a possibilidade de que não haverá nunca uma resposta definitiva à questão de se a classificação é verdadeira.”²

Vulnerant omnes, ultima necant. Cada hora gera sofrimento, a última mata.

SE A GEOMETRIA EUCLIDIANA, estritamente compreendida, está esgotada, e se o modo de vida que Euclides ofereceu está ele mesmo aberto à revisão – a primeira e inevitável etapa à rejeição –, como fica a peculiar e poderosa proposta de Euclides? A arte ocidental sempre foi um serviçal na grande casa euclidiana. Numa entrevista com Émile Bernard, Paul Cézanne observou que existe “um andaime invisível de esferas, cones e cilindros na natureza”. Os críticos têm sido menos bem-sucedidos ao observar o mesmo nas pinturas de Claude Monet ou J.M.W. Turner. As obras iniciais de Turner, especialmente seus desenhos, refletem uma apreciação arquitetônica das formas euclidianas. Mas não suas pinturas da maturidade. Sobre os grandes óleos, Kenneth Clark diz o óbvio: “Eles não têm assonância pronta na geometria.” Olhando para uma e a mesma coisa – natureza, afinal –, cada homem pode ter vindo com ideias notadamente diferentes sobre esse andaime invisível. Nenhum sentido muito bom pode ser dado à ideia de que os

elementos da geometria euclidiana podem ser encontrados *na* natureza, pois ou tudo é encontrado na natureza ou nada é. A geometria euclidiana é uma teoria, e os elementos de uma teoria podem ser interpretados apenas nos termos exigidos pela própria teoria. Os axiomas de Euclides se completam no plano euclidiano.

A natureza não tem nada a ver com isso.

EUCLIDES ALCANÇOU uma influência permanente sobre a imaginação humana por razões que vão além de sua maneira, de seu método, dos detalhes de suas demonstrações, ou mesmo das muitas ideias que apresentou à comunidade matemática. Além de qualquer outro livro, é *Os elementos* que oferece uma apreciação mais intransigente do mundo das formas – que ele criou. *Os elementos* é uma exaltação da geometria. Euclides fez um consciencioso porém malsucedido esforço para incorporar em seus pensamentos os números e suas propriedades, mas é à geometria que seu coração deve lealdade. Por essa razão, ele foi capaz de apresentar aos matemáticos o que os matemáticos tão raramente apresentam: uma visão.

Apresentada a visão, os matemáticos poderiam fazer a pergunta que apenas uma visão poderia tornar possível: que tipo de unidade jaz sob os números e as formas – *le coeur dans le coeur*, a mais profunda estrutura, o coração da profunda identidade entre formas e números.

Eles consideram doente quem me abandona

Quando me voam, eu sou as asas

Sou a dúvida e quem duvida,

*E sou o hino que o Brâmane canta.*³

Sobre esta forma de unidade, nós sabemos mais do que Euclides poderia ter sabido. A busca pela unidade vai continuar, e por certo vai continuar fracassando. E isso nós também sabemos. Seja qual for a forma de unidade que os matemáticos adquiram, a diversidade do mundo irá em tempo sobrepujá-los, como sobrepuja todos nós.

Euclides permanece o que homens e mulheres sensíveis sempre pensaram que fosse, um grande partidário, uma voz inequívoca, uma parte do drama na qual opostos são para sempre resolvidos e depois costumam ser dissolvidos.

Estou escrevendo sobre Euclides de Alexandria, o Euclides de *Os elementos*; o Euclides da geometria, pranchas empoeiradas e diagramas, procedimentos e demonstrações, pontos e planos.

Estou escrevendo sobre Euclides, o Grande.

Apêndice

Definições de Euclides

As definições em **negrito** representam o cerne do esquema de Euclides, suas estruturas de suporte.

1. **Um ponto é o que não tem parte.**
2. **Uma linha é comprimento sem largura.**
3. **As extremidades de uma linha são pontos.**
4. **Uma linha reta é uma linha uniforme com os pontos sobre si.**
5. **Uma superfície é o que apenas tem comprimento e largura.**
6. **As extremidades de uma superfície são linhas.**
7. **Uma superfície plana é uma superfície uniforme com as linhas retas sobre si.**
8. Um ângulo plano é a inclinação de uma linha em relação a outra num plano onde encontram uma a outra e não estão numa linha reta.
9. E quando as linhas contendo o ângulo são retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. Quando uma linha reta colocada sobre outra linha reta formar os ângulos adjacentes iguais um ao outro, os ângulos iguais são retos e a linha reta colocada sobre a outra é chamada de perpendicular àquela sobre a qual está colocada.
11. Um ângulo obtuso é um ângulo maior do que um ângulo reto.
12. Um ângulo agudo é um ângulo menor do que um ângulo reto.
13. Um limite é uma extremidade de qualquer coisa.
14. Uma figura é o que está contido por qualquer limite ou limites.
15. Um círculo é uma figura plana contida por uma linha tal que todas as linhas retas projetadas a partir de um certo ponto entre aqueles no interior da figura são iguais umas às outras.
16. E o ponto é chamado de centro do círculo.
17. Um diâmetro do círculo é qualquer linha reta que passe pelo centro e termine nas duas direções na circunferência do círculo, e essa linha reta também secciona o círculo.
18. Um semicírculo é a figura contida pelo diâmetro e a circunferência seccionada por ele. E o centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são aquelas contidas por linhas retas, figuras trilaterais são aquelas contidas por três, quadriláteras são aquelas contidas por quatro e multilaterais são aquelas contidas por mais do que quatro linhas retas.

20. Das figuras trilaterais, um triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, um triângulo isósceles é o que tem dois de seus lados iguais e um triângulo escaleno é o que tem os três lados desiguais.
21. Além disso, das figuras trilaterais, um triângulo retângulo é aquele que tem um ângulo reto, um triângulo obtuso é aquele que tem um ângulo obtuso e um triângulo agudo é aquele que tem seus três ângulos agudos.
22. Das figuras quadriláteras, um quadrado é aquele que tem lados iguais e todos os ângulos retos; um oblongo é o que tem os quatro ângulos retos mas não é equilátero; um losango é o que é equilátero mas não tem ângulos retos; e um romboide é o que tem seus lados e ângulos opostos iguais um ao outro mas não é equilátero nem tem ângulos retos. E sejam os outros que não estes chamados de trapézios.
23. **Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando no mesmo plano e sendo produzidas indefinidamente em ambas as direções, não encontram uma à outra em qualquer direção.**

Notas

1. Sinais de homens

1. Tony Judt, "The Glory of the Rails", *New York Review of Books*, 23 dez 2010.

6. O maior Euclides

1. A tradução desta proposição seria mais fácil de compreender se as palavras "nas mesmas paralelas" fossem substituídas pelas palavras "estão dentro das mesmas paralelas". Em outras palavras, o paralelogramo e o triângulo estão ligados pelas *mesmas* linhas paralelas.

7. Prova visível e invisível

1. A Proposição 27 de Euclides pode sugerir o postulado das paralelas de Euclides. Isso é incorreto. A Proposição 27 de Euclides é inversa ao postulado das paralelas de Euclides, e portanto logicamente equivalente ao seu *contrário*.
2. A Proposição 27 de Euclides é logicamente equivalente à Proposição 16 de Euclides, algo que o lógico August De Morgan observou no século XIX. Euclides poderia muito bem ter começado com a Proposição 16 e, após demonstrá-la, ter chegado à Proposição 27 por contraposição. A prova resultante seria impecável, mas não teria mencionado diretamente aquelas linhas paralelas que se estendem para longe presentes em sua Proposição 27. Para apresentá-las, ele deveria ter revertido etapas lógicas e restaurado a proposição original.
3. James Joyce, *Finnegan's Wake* (Austrália Meridional: Library of the University of Adelaide, 2005), p.213.

8. A proposta do diabo

1. Ernst Steinitz, "Algebraische Theorie der Körper", *Crelles Journal* (1910) (tradução do presente autor).
2. Para cada, ver meu *One, Two, Three* (Nova York: Pantheon Books, 2011).
3. Discuto este significado intuitivo simples e poderoso em David Berlinski, *A Tour of the Calculus* (Nova York: Pantheon, 1995).

9. A Sociedade Anônima Euclidiana

1. Omar Khayyám, *The Rubáiyat of Omar Khayyám*, traduzido por Edward Fitzgerald (São Francisco: W. Doxey, 1898).
2. “*Die Parallelen auf jenem Wege sollst Du nicht probieren: ich kenne auch jenen Wege bis zu Ende, auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen: jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden. Ich beschwöre Dich bei Gott! Lass die Parallelen in Frieden.*” Coisa da pesada.
3. T.S. Eliot, “Little Gidding”, *Selected Poems of T.S. Eliot* (Nova York: Harcourt Brace Jovanovich, 1991).

10. Euclides, o Grande

1. René Thom, *Semio Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1990), p.32.
2. “Mathematics: The Loss of Certainty”, *ScienceBlog*, 2005, resenha de Brian Davies, “Whither Mathematics?”, *Notices of the American Mathematical Society* 52 (dez 2005): 1350-6.
3. Ralph Waldo Emerson, “Brahma”.

Nota do professor

Em sua Proposição 29, Euclides diz...

Escrever sobre Euclides é imaginar-se vinculado como um companheiro em arte de homens e mulheres há muito mortos mas ainda caminhando em passos pesados na direção do quadro-negro euclidiano. O discreto murmúrio de seus votos pode ser ouvido em grego, latim ou árabe; pode ser ouvido em todas as línguas nas quais livros são produzidos e memórias, preservadas.

Todo mundo que ensina ou escreve sobre *Os elementos* de Euclides o faz de sua própria perspectiva, é claro, mas a geometria plana euclidiana não é um assunto que estimule inovação pedagógica. Os elementos são sempre os mesmos: as noções comuns de Euclides, suas definições, seus axiomas, depois seus teoremas e suas demonstrações. Há um sentido, às vezes subjogado e às vezes efervescente, de que esse velho sistema merece uma forma de devoção, professores e seus alunos participando de um ritual cujo pleno significado não é facilmente abrangido e nunca abrangido de uma só vez.

A tradição euclidiana se estende do mundo antigo ao nosso, mas seu valor não está no fim das proposições que ele torna possíveis. Isso nós conhecemos, e já há muito tempo. “O que pode ser mostrado não pode ser dito”, observou Wittgenstein em seu *Tractatus* (*Was gezeigt werden kann, kann nichts gesagt werden*).

O que é verdadeiro em *Os elementos* de Euclides.

O livro exige esforço e concentração. As demonstrações não despontam facilmente. Um modo de vida é requisitado, e exigido caso não esteja disponível. É um modo de vida e uma forma de dedicação que têm um notável valor moral. Um modo de vida nobre. *Os elementos* não diz isso, mas todos que chegam ao livro entendem que é o que ele mostra.

A academia euclidiana é notavelmente estável. Dura já um bom tempo. Professores, escritores e seus alunos entram na academia e se perdem nas areias do tempo. Não importa. A academia confere uma forma de imortalidade a seus acadêmicos. É a imortalidade decorrente de ter participado de uma das artes da civilização. É a única forma de imortalidade que qualquer de nós pode compartilhar.

Professores e escritores esperam que, tendo sido ensinados, sejam capazes, por sua vez, de ensinar outros. É uma *esperança*.

Mas ninguém que escreva sobre Euclides está autorizado a terminar um livro em dúvida.

Agora, em sua Proposição 30, Euclides diz...

Nota sobre as fontes

Todas as referências a Euclides são de Euclides, *The Elements: Books I – XIII*, completo, editado e traduzido por Thomas L. Heath (Nova York: Barnes & Noble, 2006). A edição original do texto de Heath foi publicada em 1906; seus comentários textuais, embora certas vezes válidos, estão, obviamente, desatualizados.

Índice remissivo

adição, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Alexandria, biblioteca de, 1

álgebra, 1, 2-3, 4, 5

 álgebra geométrica, 1, 2, 3; *ver também* geometria; geometria analítica

 linha reta definida por uma equação, 1, 2-3

 triunfo da, 1, 2, 3

ângulos, 1, 2, 3

 agudos, 1, 2

 ângulos da base de um triângulo isósceles, 1

 ângulos iguais, 1, 2-3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-10, 11, 12, 13

 ângulos retos, 1, 2-3, 4, 5, 6; *ver também* teorema de Pitágoras do triângulo curvilíneo, 1-2

 e a pseudoesfera de Beltrami, 1

 na geometria esférica, 1

 obtusos, 1, 2

 retilíneos, 1

 trissecação, 1, 2

Apolônio, 1

Appel, Kenneth, 1

aproximações, 1

argumentos, 1, 2-3, 4

Aristipo, 1-2

Aristóteles, 1, 2, 3, 4, 5, 6

aritmética, 1-2, 3, 4-5, 6

axiomas geométricos como teoremas aritméticos, 1-2

como incompleta, 1

consistência/inconsistência, 1

e o axioma de completude, 1-2

teorema fundamental da, 1

triunfo da, 1

ver também geometria; unidade da geometria e aritmética;
matemática; números

Arquimedes, 1, 2

arquipélago da Arábia, 1

arquitetura, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

arte, 1, 2, 3-4, 5, 6, 7

quadros, 1-2

Atiyah, Michael, 1

átomos, 1-2, 3

autoevidência, 1, 2

axioma de Cantor-Dedekind, 1, 2, 3

axiomas, 1-2, 3, 4, 5, 6

axioma da completude, 1, 2

axioma de Arquimedes, 1

axioma de Cantor-Dedekind, 1, 2, 3

axioma de Playfair, 1, 2, 3, 4, 5

axiomas de Hilbert, 1-2, 3

como autoevidentes, 1

consistência/inconsistência, 1, 2

de campos, 1-2, 3

de conexão, ordem, congruência e continuidade, 1

de geometria neutra, 1-2
interpretados na aritmética, 1-2
os três primeiros axiomas, 1, 2-3, 4-5, 6, 7
primeiro axioma, 1-2
quarto axioma, 1-2, 3
quinto axioma, 1-2, 3; *ver também* axiomas; axioma de Playfair;
postulado das paralelas
relação entre axiomas, 1, 2, 3, 4
tornados teoremas, 1
ver também sistemas axiomáticos

babilônios, 1, 2
Bacon, Francis, 1
Beltrami, Eugenio, 1, 2-3
Bolyai, Farkas, 1-2
Bolyai, János, 1, 2, 3, 4
Boole, George, 1

cálculo de segmentos, 1-2
cálculo diferencial, 1, 2
cálculo infinitesimal, 1-2, 3
campos, 1, 2, 3, 4
Cantor, Georg, 1
cardioide, 1, 2
catedrais, 1
causalidade, 1
Cézanne, Paul, 1
Chesterton, G.K., 1

China, 1

Cícero, 1

ciência, 1

círculos, 1, 2, 3, 4, 5

centro/circunferência do, 1-2, 3, 4, 5-6

diâmetro, 1, 2

e a primeira proposição, 1

e as geodésicas, 1-2

raio do, 1, 2, 3-4, 5

semicírculos, 1

ver também Poincaré, Henri: disco de Poincaré

Clark, Kenneth, 1, 2

coincidência, 1, 2-3, 4, 5, 6, 7, 8

e modelos concretos versus abstratos da geometria, 1-2

compasso, 1; *ver também* régua e compasso

complexidade, 1, 2

comprimento, 1-2, 3, 4, 5

computadores, 1

congruência, 1, 2, 3-4, 5, 6, 7, 8

contradições, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

contrapostos, 1-2, 3, 4

Coordinate Method, The (Gelfand, Glagoleva e Kirilov), 1

crítica da razão pura, A (Kant), 1

culturas, 1, 2, 3

curvatura, 1, 2, 3, 4, 5

e as linhas retas, 1-2

extrínseca, 1, 2

negativa, 1

Da natureza (Parmênides), 1

Das Kontinuum (Weyl), 1

Davies, Brian, 1, 2

De Architectura (Vitruvius), 1

De Morgan, August, 1

Dedekind, Richard, 1-2; *ver também* axioma de Cantor-Dedekind
dedução, 1, 2

definições, 1-2, 3-4, 5-6, 7, 8-9

3, 1

4, 1

5, 1

7, 1

8 e 9, 1-2

10, 1

15, 16 e 17, 1

19, 1, 2, 3

20, 1

23, 1, 2, 3-4

da 9 à 22, 1

de forma, 1

de linhas hiperbólicas/distância, 1-2, 3

e campos reais ordenados, 1

sete primeiras e 23, 1

Demócrito, 1-2, 3

demonstrações, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-9, 10, 11, 12-13

como artefatos, 1

como dificuldade, 1, 2-3, 4

como modo de vida, 1, 2; *ver também* sistemas axiomáticos:
 como modo de vida
da proposição 27, 1-2, 3
de Lobachevsky, 1
demonstração por contradição, 1; *ver também reductio ad
absurdum*
do postulado das paralelas, 1-2, 3
do teorema das quatro cores, 1
do teorema de Pitágoras, 1-2, 3
e noções comuns, 1-2
etapas das, 1
Descartes, René, 1, 2
Dieudonné, Jean, 1
dimensões, 1, 2-3, 4-5, 6, 7, 8-9, 10
distância, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
 distância hiperbólica, 1-2, 3
divisão, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

egípcios, 1
Einstein, Albert, 1
Elementary Geometry from an Advanced Standpoint (Moise), 1
elementos, Os (Euclides), 1, 2, 3, 4, 5, 6-7, 8
 como ilustrada, 1-2, 3-4, 5-6, 7, 8-9
 como livro-texto, 1-2, 3, 4-5
 como tendo alcance simbólico limitado, 1
 e pastoral da escalada da montanha, 1-2
Livro I, 1, 2
Livro II, 1, 2

Livro V, 1, 2, 3

Livro VII, 1, 2

Livro X, 1, 2, 3

Livros V ao IX, 1

livros na, 1-2

os quatro primeiros livros, 1

Eliot, George, 1

elipses, 1, 2

Empson, William, 1

Encyclopedia Britannica, 1

épicos homéricos, 1

equador, 1

esferas, 1, 2; *ver também* superfícies: superfície de uma esfera

espaço, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-10, 11, 12, 13, 14

homogeneidade do, 1

ilimitado versus infinito, 1

tridimensional, 1, 2, 3

espaços vetoriais, 1

estabilidade, 1

ética, 1

Euclides, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7

como matemático, 1

como professor, 1-2, 3-4, 5-6

dupla compreensão de, 1

e a unidade subjacente à diversidade da experiência, 1

e Aristóteles, 1-2, 3

e o quinto axioma (postulado das paralelas), 1, 2, 3, 4-5, 6

estilo euclidiano, 1

- ideal euclidiano, 1
- nascimento/morte, 1
- predecessores de, 1
- tradição euclidiana, 1-2
- traduções de, 1
- versões modernas de, 1

Euclides ab omni naevo vindicatus (Saccheri), 1

Eudoxo, 1, 2, 3

Everest, monte, 1

Explícito (palavra), 1

figuras quadriláteras, 1

figuras retilíneas, 1

figuras trilaterais, 1

Flaubert, Gustave, 1

formas, 1, 2, 3, 4-5, 6, 7, 8-9, 10-11, 12, 13, 14, 15

- coincidência de, 1, 2, 3

- definição de, 1

formas (platônicas), 1-2, 3, 4

frações *ver* números

Friedman, Harvey, 1

Galois, Évariste, 1

Gauss, Carl Friedrich, 1, 2, 3, 4, 5-6, 7

Gelfand, I.M., 1

geodésicas, 1-2, 3

geometria, 1, 2, 3, 4, 5, 6

classificação das geometrias, 1-2
geometria analítica, 1-2, 3, 4, 5, 6
geometria diferencial, 1
geometria elíptica, 1
geometria esférica, 1
geometria euclidiana como primeira teoria, 1-2, 3
geometria hiperbólica, 1, 2
geometria neutra, 1, 2-3
geometria sólida, 1
geometrias não euclidianas, 1, 2, 3, 4, 5, 6-7
modelos concretos versus abstratos, 1, 2
novo sistema axiomático da, 1
revisão da geometria euclidiana, 1-2
unidade da geometria e a aritmética, 1-2, 3, 4-5, 6, 7, 8, 9-10
geometrias não euclidianas *ver* geometria
Geometry, Euclid and Beyond (Hartshorne), 1
Glagoleva, E.G., 1
Gödel, Kurt, 1-2
graus de liberdade, 1-2
gregos (antigos), 1, 2, 3, 4
Grundlagen der Geometrie (Hilbert), 1-2
grupos, 1-2, 3
Guthrie, Francis, 1

Hadamard, Jacques, 1
Haken, Wolfgang, 1
Haldane, J.B.S., 1
Hardy, G.H., 1

Hartshorne, Robin, 1-2

Haytham, Ibn al, 1

Hilbert, David, 1, 2, 3, 4-5, 6, 7-8

hipotenusa, 1, 2; *ver também* teorema de Pitágoras

Horácio, 1

Idade Média, 1

identidade, 1, 2, 3, 4, 5

- de um ponto e um par de números, 1; *ver também* pontos:
pontos como par de números

- entre formas e números, 1

igualdade, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7

- de ângulos retos, 1-2

- de quadrados, 1-2

- definição, 1

- “menor ou igual a”, 1

- transitividade das, 1

- ver também* ângulos: como iguais

imagens no espelho, 1

Império Romano, 1

inferência, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

- regras de inferência, 1-2

infinito, 1, 2, 3, 4, 5, 6

- números naturais como potencialmente infinitos, 1

intuição, 1-2, 3, 4, 5, 6

isometria, 1

James, Henry, 1

Johnson, Samuel, 1, 2

Joyce, D.E., 1

Judt, Tony, 1

Júpiter e Antíope (quadro), 1, 2, 3, 4

Kant, Immanuel, 1

Kazan Messenger, The, 1, 2

Kazan, Universidade de, 1

Khayyám, Omar, 1

Kirilov, A.A., 1

Klein, Felix, 1-2, 3

Kline, Morris, 1

La Géométrie (Descartes), 1-2

largura, 1, 2, 3

latitude/longitude, 1

Leçons de géométrie élémentaire (Hadamard), 1

leis associativas, 1

leis distributivas, 1

Libri Decem (Vitruvius), 1

limites, 1

linhas, 1, 2

 existência de, 1

 linhas curvas, 1; *ver também* curvatura

 linhas hiperbólicas, 1

 linhas paralelas, 1, 2-3, 4, 5, 6, 7, 8-9, 10, 11

 linhas retas, 1, 2, 3-4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25-26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33,

34, 35, 36

linhas retas e a razão de três números, 1

segmentos de linha, 1, 2-3

Lobachevsky, Nicolai, 1, 2, 3, 4-5, 6, 7

lógica, 1, 2, 3-4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

de relações, 1

ver também silogismos

magnitudes, 1, 2-3

Mallory, George, 1

matemática, 1, 2, 3-4, 5, 6, 7

como duvidosa, 1

e pastoral da escalada da montanha, 1

física matemática, 1

Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Kline), 1

mecânica analítica, 1

medidas/mensuração, 1

modelos, 1-2, 3-4

modus ponens, 1

Moise, Edwin, 1

Monet, Claude, 1

moralidade, 1, 2

Mordell, Louis Joel, 1

Morley, Frank, 1

movimento, 1, 2, 3, 4, 5

como impossível, 1

maneiras de se mover num plano, 1

movimentos de corpos rígidos, 1

poder dos objetos geométricos se moverem ou serem movidos,
1, 2, 3, 4, 5, 6

mudança, 1, 2, 3

multiplicação, 1, 2, 3, 4

nada, 1, 2, 3-4

Newton, Isaac, 1

noções comuns, 1-2, 3-4

primeira, 1

quarta, 1

quinta, 1-2

segunda/terceira, 1, 2, 3

Notices of the American Mathematical Society, 1

numerais romanos, 1

números, 1-2, 3, 4, 5, 6-7, 8-9, 10, 11

ao quadrado/raiz quadrada de, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

conjuntos de números, 1-2

e distâncias, 1

e pontos, 1; *ver também* pontos: ponto enquanto um par de
números

frações, 1, 2, 3, 4

identificação de pontos no espaço, 1

numerais romanos, 1

números como uma múltipla composição de unidades, 1

números irracionais, 1

números maiores/menores, 1

números naturais, 1, 2, 3, 4, 5, 6

números naturais como potencialmente infinitos, 1

números negativos, 1, 2, 3
números primos, 1
números racionais, 1, 2
números reais, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
propriedades geométricas dos numerais, 1-2
zero, 1, 2, 3, 4

objetos rígidos, 1
oblongos, 1
operação associativa, 1-2

papiros, 1
Pappus, 1
parábolas, 1
paradoxos, 1
paralelismo, 1, 2, 3, 4, 5, 6; *ver também* linhas: linhas paralelas;
postulado das paralelas
paralelogramos, 1, 2
Parmênides, 1-2
partes, 1, 2
 o todo maior que a parte, 1, 2-3
Pasch, Moritz, 1
pastoral da escalada da montanha, 1-2
perspectiva (na pintura), 1
Peyrard, François, 1
Pierce, C.S., 1
pintura, 1-2, 3-4
pirâmides, 1, 2

Pitagóricos, 1, 2

plano hiperbólico *ver* planos

planos, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

definidos, 1, 2

existência de, 1

graus de liberdade, 1-2

plano hiperbólico, 1-2, 3, 4, 5, 6

plano projetivo, 1-2

planura, 1, 2, 3

Platão, 1, 2, 3, 4, 5

Playfair, Francis, 1-2; *ver também* axiomas: axioma de Playfair

Poincaré, Henri, 1

dicionário de, 1-2

disco de Poincaré, 1-2

polígonos, 1

ponte de asnos, 1, 2; *ver também* proposições: proposição 5

pontos, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

definidos, 1, 2, 3

e continuidade, 1

“entre dois pontos”, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13-14, 15,
16

existência de, 1, 2, 3-4

ponto como um par de números, 1-2, 3, 4, 5-6

pontos hiperbólicos, 1

versus átomos, 1, 2

postulado das paralelas, 1-2, 3

e o teorema de Pitágoras, 1

negação/fracasso do, 1, 2, 3-4, 5-6, 7-8, 9, 10

ver também axiomas; quinto axioma
postulados, 1; *ver também* axiomas
praxinoscópios, 1-2
precisão, 1, 2
premissas, 1-2, 3
pressupostos ou suposições, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
da existência de pontos/linhas/planos, 1-2, 3
de que o postulado das paralelas é falso, 1, 2
ocultos, 1-2

Principia (Newton), 1

Proclo, 1

Programa de Erlangen, 1, 2

proporções, 1, 2-3, 4

proposições, 1, 2, 3, 4

1, 1-2

3, 1

4, 1-2, 3, 4-5, 6, 7

5, 1, 2-3

16, 1, 2, 3, 4

27, 1-2, 3

29, 1, 2

32, 1

46, 1

47, 1-2

dificuldades, 1-2

primeiras 28 proposições, 1

pseudoesfera, 1-2

Ptolomeu Soter, 1, 2

Ptolomeu, 1

quadrados, 1, 2-3, 4-5, 6, 7, 8

raiz quadrada *ver* números: ao quadrado/raiz quadrada

razões, 1-2, 3, 4-5

Reductio ad absurdum, 1, 2-3

reflexão (em planos), 1, 2-3, 4, 5

regressão infinita, 1

régua e compasso, 1-2, 3, 4

régua *ver* régua e compasso

relação inversa, 1-2, 3, 4, 5, 6

relações conversas, 1, 2

Relativity and Geometry (Torretti), 1

Renascença, 1, 2; *ver também* Renascença Árabe

Renascença Árabe, 1

retângulos, 1, 2

Riemann, Bernhard, 1

romboide, 1

rotação, 1, 2, 3

Rubáyát (Khayyám), 1

Russell, Bertrand, 1, 2, 3, 4

Saccheri, Girolamo, 1

“Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea” (Beltrami),

1

Science and Hypothesis (Poincaré), 1

senso comum, 1, 2, 3, 4, 5-6, 7, 8

silogismos, 1-2

sistemas axiomáticos, 1, 2, 3, 4, 5

 como modo de vida, 1, 2, 3

 e argumentos, 1

 novos, 1-2

sistemas de coordenadas, 1, 2

Sócrates, 1; *ver também* Platão

Some Versions of Pastoral (Empson), 1-2

St. Vincent Millay, Edna, 1

Steiner-Lehmus, teorema de, 1

Steinitz, Ernst, 1, 2

subtração, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

superfícies, 1, 2

 superfície de uma esfera, 1, 2, 3, 4-5

superposição, 1, 2; *ver também* coincidência

tabuletas de barro, 1

tamanho, 1

Teeteto, 1

tempo, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

 e a 27^a proposição, 1-2

 fluxo do tempo versus pontos usados para marcar, 1

teorema das quatro cores, 1

teorema de Pitágoras, 1-2, 3

 e o postulado das paralelas, 1

 equação algébrica do, 1

teoremas, 1, 2, 3, 4

 41, 1

- de geometria hiperbólica, 1
- de Lobachevsky, 1, 2
- relação entre axiomas e teoremas, 1, 2, 3, 4
- teorema das quatro cores, 1
- teorema de Steiner-Lehmus, 1
- tornados axiomas, 1
- ver também* teorema de Pitágoras
- teoria da relatividade, 1
- teorias, 1, 2
 - das geometrias euclidiana e hiperbólica, 1
 - geometria euclidiana como primeira geometria, 1-2, 3
- Theorema Egregium* (Gauss), 1
- Thom, René, 1, 2, 3, 4
- Torretti, Roberto, 1
- transformações, 1, 2
- translação (nos planos), 1, 2, 3
- triângulos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-9, 10
 - como iguais, 1, 2-3
 - curvilíneos, 1-2
 - definidos, 1, 2
 - e a pseudoesfera de Beltrami, 1
 - equiláteros, 1-2, 3, 4
 - escalenos, 1
 - hiperbólicos, 1, 2, 3
 - isósceles, 1, 2-3, 4, 5
 - na geometria esférica, 1
 - platônicos, 1; *ver também* teorema de Pitágoras
- trilhos, 1, 2

Turner, J.M.W., 1

“Über den Zahlbegriff” (Hilbert), 1

unidade/diversidade da experiência, 1, 2

vácuo, 1, 2, 3

verdade, 1, 2, 3, 4, 5

“Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische
Forschungen” (Klein), 1

Vermeer, Johannes, 1, 2

Vista de Delft (quadro), 1, 2

Vitruvius Pollio, Marcus, 1

Voltaire, 1

Watteau, Antoine, 1, 2, 3, 4, 5

Weyl, Hermann, 1

“Whither Mathematics?” (Davies), 1

Whymper, Edward, 1

Wittgenstein, Ludwig, 1

Zenão de Eleia, 1

zero *ver* números

Título original:

The King of Infinite Space

(Euclid and his Elements)

Tradução autorizada da primeira edição americana, publicada em 2013 por Basic Books, um selo da Perseus Books Group, de Nova York, Estados Unidos

Copyright © 2013, David Berlinski

Copyright da edição brasileira © 2018:

Jorge Zahar Editor Ltda.

rua Marquês de S. Vicente 99 – 1º | 22451-041 Rio de Janeiro, RJ

tel (21) 2529-4750 | fax (21) 2529-4787

editora@zahar.com.br | www.zahar.com.br

Todos os direitos reservados.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Grafia atualizada respeitando o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Capa: Estúdio Insólito

Foto da capa: © Bettmann/Getty Images

Produção do arquivo ePub: Booknando Livros

Edição digital: fevereiro de 2018

ISBN: 978-85-378-1745-2



O poder do pensamento matemático

Ellenberg, Jordan

9788537814505

523 páginas

[Compre agora e leia](#)

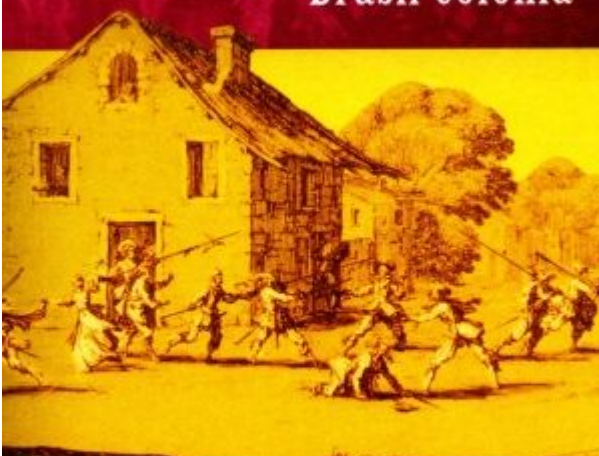
Eleito um dos 50 livros notáveis de não ficção pelo The Washington Post Best-seller do The New York Times "Quando será que vou usar isso?" Esta é a pergunta clássica de nove entre dez alunos às voltas com cálculos, fórmulas e equações. Para muitos, a matemática que aprendemos na escola é algo totalmente abstrato. O matemático Jordan Ellenberg mostra, porém, que a matemática está em todo lugar e se relaciona com questões do nosso cotidiano. Com humor e irreverência, Ellenberg aborda de modo simples e claro os conceitos mais complicados, sem os jargões próprios da área. Nada escapa desse amplo mosaico: o resultado das eleições presidenciais, o futuro da obesidade, a pintura renascentista italiana, o que o Facebook sabe (e o que ele não sabe) a seu respeito e até mesmo a existência de Deus. A matemática é a ciência de como não estar errado e nos ajuda a pensar melhor - aguça a intuição, afina a capacidade de julgamento, doma a incerteza e é uma ferramenta eficaz para entendermos o mundo de maneira mais profunda e consistente. *** "Revigorante, lúcido e ao mesmo tempo rigoroso, o livro nos mostra como surgem as ideias matemáticas - e também como podemos começar a pensar matematicamente." The New York Times "Os leitores serão surpreendidos pela frequência com que a matemática lança uma luz inesperada sobre a economia, a saúde e a política." Booklist "Espirituoso, atraente e simplesmente gostoso de ler, esse livro vai ajudar você a explorar seus superpoderes matemáticos." Scientific American "Fácil de acompanhar, apresentado com humor. O livro irá ajudá-lo a evitar as armadilhas

que surgem quando não temos os instrumentos corretos." The Wall Street Journal

[Compre agora e leia](#)

JORGE ZAHAR EDITOR

Rebeliões no Brasil Colônia



LUCIANO FIGUEIREDO

Descobrimdo o Brasil

Rebeliões no Brasil Colônia

Figueiredo, Luciano

9788537807644

88 páginas

[Compre agora e leia](#)

Inúmeras rebeliões e movimentos armados coletivos sacudiram a América portuguesa nos séculos XVII e XVIII. Esse livro propõe uma revisão das leituras tradicionais sobre o tema, mostrando como as lutas por direitos políticos, sociais e econômicos fizeram emergir uma nova identidade colonial.

[Compre agora e leia](#)



razões da crítica

LUIZ CAMILLO OSORIO

arte.

JORGE zahar EDITOR

Razões da crítica

Osorio, Luiz Camillo

9788537807750

70 páginas

[Compre agora e leia](#)

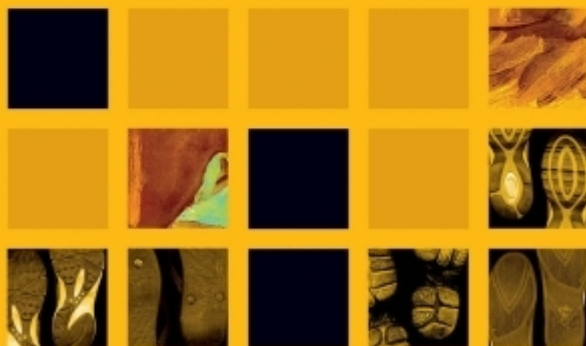
Entre tudo poder ser arte e qualquer coisa de fato ser arte reside uma diferença fundamental. Esse livro discute o papel e os lugares da crítica na atualidade, bem como sua participação no processo de criação e disseminação de sentido, deslocando-a da posição de juiz para a de testemunha.

[Compre agora e leia](#)

RAWLS

Nythamar de Oliveira

FILOSOFIA • PASSO-A-PASSO 18



JORGE ZAHAR EDITOR

Rawls

Oliveira, Nythamar de

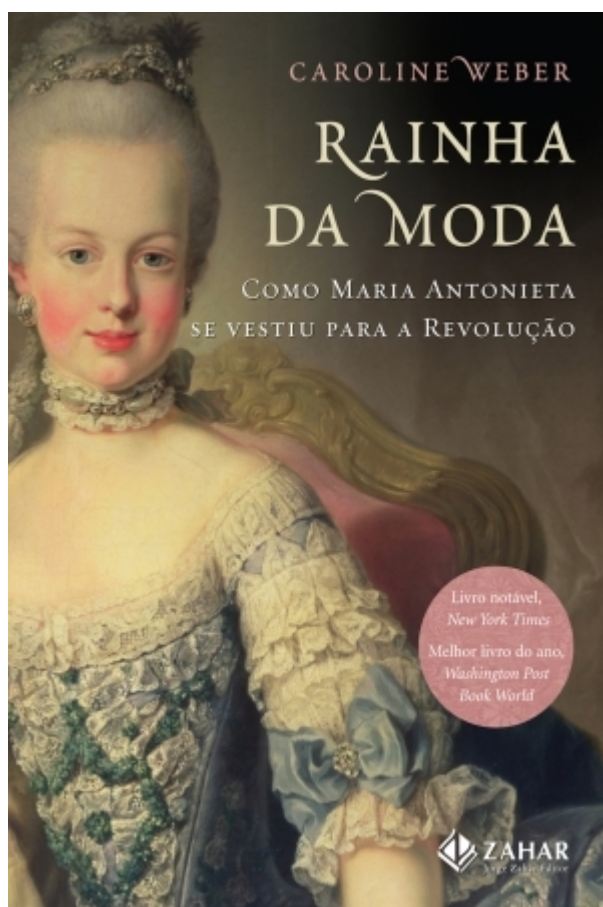
9788537805626

74 páginas

[Compre agora e leia](#)

A consagrada tradução do especialista em grego, Mário da Gama Kury. Lideradas pela eloquente Valentina, as mulheres de Atenas decidem tomar conta do poder, cansadas da incapacidade dos homens no governo. Elas se vestem como homens, tomam a Assembleia e impõem sorrateiramente uma nova constituição, introduzindo um sistema comunitário de riqueza, sexo e propriedade. Esta comédia é uma sátira às teorias de certos filósofos da época, principalmente os sofistas, que mais tarde se cristalizaram na República de Platão. As comédias de Aristófanes são a fonte mais autêntica para a reconstrução dos detalhes da vida cotidiana em Atenas na época clássica.

[Compre agora e leia](#)



CAROLINE WEBER

RAINHA DA MODA

COMO MARIA ANTONIETA
SE VESTIU PARA A REVOLUÇÃO

Livro notável,
New York Times
Melhor livro do ano,
Washington Post
Book World

 ZAHAR
1971 Fundação

Rainha da moda

Weber, Caroline
9788537805039
470 páginas

[Compre agora e leia](#)

Maria Antonieta revolucionou a moda de seu tempo. Mais do que isso, revolucionou seu tempo através da moda. Do traje de montaria masculino aos excêntricos penteados, dos vestidos cravejados de brilhantes ao modesto estilo pastoril, suas roupas revolucionaram o rigoroso cerimonial da corte de Luís XVI e ajudaram a desfazer a aura de sacralidade que envolvia a monarquia, acirrando os ânimos da Revolução. Nessa obra reveladora e original, repleta de belas ilustrações, a autora adota um olhar diferente de qualquer outra biografia já publicada sobre a polêmica rainha francesa. E mostra como a moda foi ao mesmo tempo o meio de afirmação de Maria Antonieta e o caminho para seu trágico fim.

[Compre agora e leia](#)